

二次錐線的教學

國立政治大學 薛昭雄

在高中甚或大一教微積分時，二次錐線的教學幾乎採用了如下一定的定義：

1 在平面上，若一動點到一定點的距離等於與一定直線的距離，則此動點的軌跡叫做拋物線。

2 在平面上，若一動點到二定點的距離之和為一定常數，則其軌跡為一橢圓。

3 在平面上，若一動點與二定點距離之差等於一定常數，則其軌跡為一雙曲線。

換句話說，這些定義都是建立於焦點、準線或定和與定差上。在上述的標準定義上，經過代數的演算得出所謂的一般式，而後各別作出上述的三種標準圖形來。

我一直懷疑，我們可否有另外（或更好？）的方法來介紹如此類的教材，至少能夠脫離定義一公式一作圖固定的教學方式。

下面就是在這種想法下的結果，當然這些結果並不是作者個人所獨創，有興趣的讀者可參閱文末的參考資料。

(一)拋物線

拋物線的作圖應該是比較簡單的，下列作圖的步驟，如果求其準確，利用方格紙可能較為理想。

1 作法

1 在一方格紙上的右端上作出與方格紙邊端平行的直線，如圖 1 之 $x=p$ 直線。

2 作一與直線 $x=p$ 垂直的直線（此直線儘可能在方格紙的中央），取此直線為 x 軸。

3 在直線 $x=p$ 的右邊且在 x 軸上取一點 B ，此 B 的座標即設為 $B(a, 0)$ 。（為了作圖的完美， B 與直線 $x=p$ 的距離就不宜太近）

4 在直線 $x=p$ 上選取一點 $C(p, r)$ ，連 $\overline{BC}$ 。

5 過 C 點作一直線 CA 垂直於 $x=p$ 。

6 作直線 BQ 垂直於 $\overline{BC}$ 交直線 CA 於點 $R(x, y)$ 此 R 即為所求拋物線上一點。

7 仿第 4. 5. 6. 步驟求出 20 個 R 點（如圖 2）。

8 順次連接這些 R 點即得一拋物線（如圖 2）。

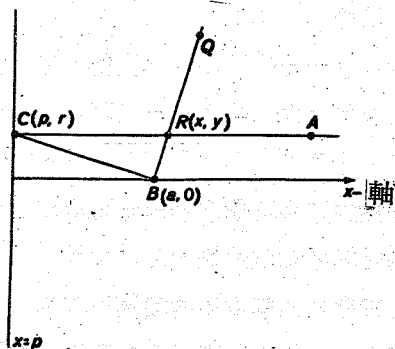


圖 1

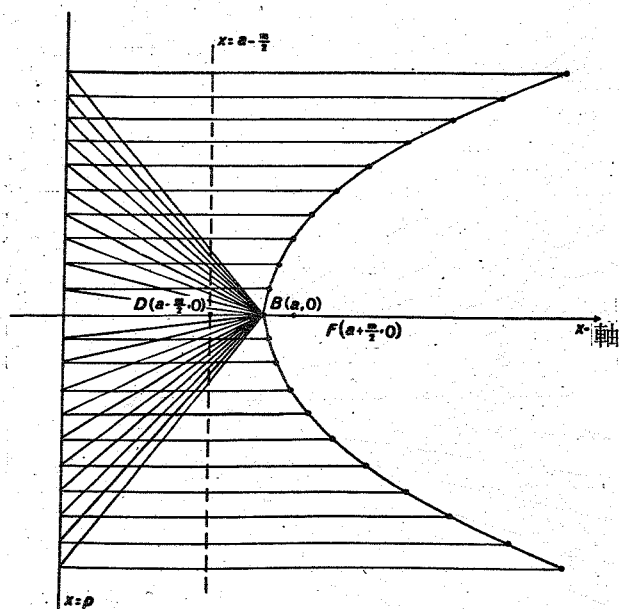


圖 2

2 教學活動

利用上述的作法作出的圖 2，教師可以在教室中進行下列的教學：

首先可以試著推出對應的方程式如下：

因為直線 CA 為 $y = r$

直線 BQ 爲 $y = \frac{(a-p)}{r} (x-a)$

由上二式消去 r ，即得

$$y = \frac{(a-p)}{\bar{v}}(x-a)$$

郎郎

$$y^2 = (a-p)(x-a)$$

這就是圖 2 所對應的方程式了。

其次，下列的工作老師仍然是不可忽略，而且必須強調的：

(a) $B(a, 0)$ 在直線 $x=p$ 左端時，拋物線的方程式會產生怎樣的改變？

(b)若 $B(a, 0)$ 改為 $B(a, b)$ 時，那麼拋物線的方程式又將如何改寫呢？

(c)若直線 $x=p$ ，改成與 x 軸平行的直線，
那麼拋物線的方程式又如何呢？

到這個階段，學生們應該對拋物線的性質有

所瞭解，下列的一些問題可以用來發問學生：

(a) 令 $a - p = 4m$ ，那麼拋物線的方程式可以如何改寫？

(b) 找出點 $F(a+m, 0)$ 的位置來；此點稱為拋物線的焦點。

(c) 過 F 點作與 x 軸垂直的直線交拋物線於 S, T 二點, 此線段 ST 即為正焦弦, 證明正焦弦長為 4m。

(d) 找出點 $D(a-m, 0)$ ，過 D 作一直線垂直於 x 軸，此直線稱為準線，你能求出它的方程式嗎？

(e) 在拋物線上任取一點 P 過 P 作一平行於 x 軸的直線交準線與 S，你知道比值 $\frac{FP}{PS}$ 嗎？仿此

取數個點P，再求比值 $\frac{\overline{FP}}{\overline{PS}}$ ，這些比值有什麼關

係？你可以得到什麼結論？比值 $\frac{FP}{PS}$ 稱為離心率，一般以 e 表之。

在(e)裡，老師不可忘記作個結論：它與一般的定義是完全一致的。

(二) 橢圓

1 作法

- ### 1 同拋物線作法 1

- ## 2 同拋物線作法 2。

3. 在 x 軸取點 $A(-a, 0)$ 與點 $B(a, 0)$
(如圖 3) ($a > 0$)。

4. 在直線 $x=p$ 上取一點 $C(p, r)$ ，連 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$ 。

5. 作 $\overline{AQ} \perp \overline{AC}$ 交 $\overline{BC}$ 於 $R(x, y)$, R 即爲所求橢圓上之一點。

6. 仿 4. 5. 二步驟，求出 20 個 R 點。

7. 順次連接這些R點即得一橢圓（如圖4）

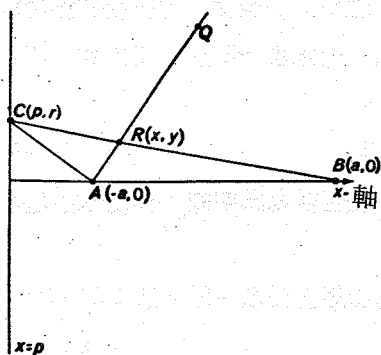


圖 3

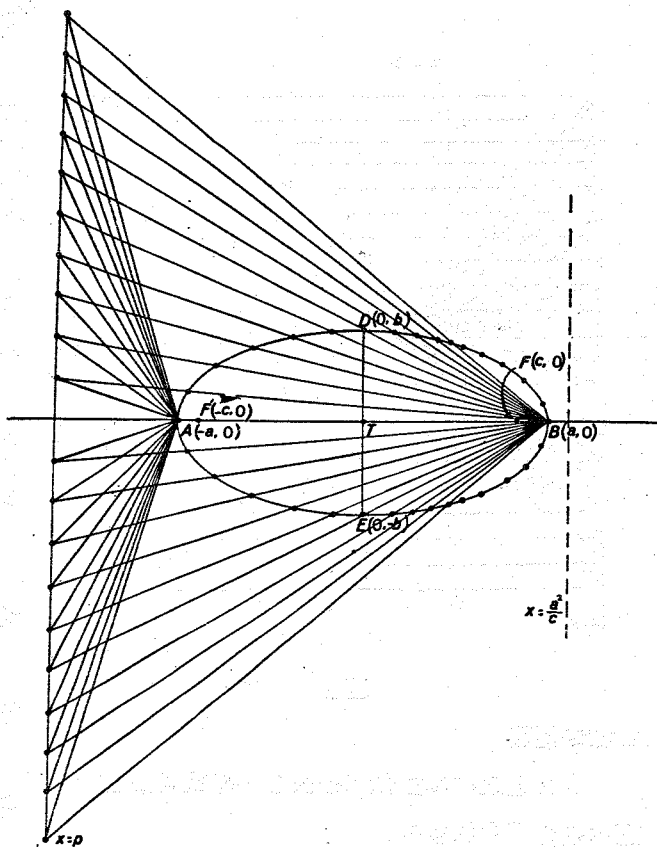


圖 4

2 教學活動

同樣地，可仿拋物線的情形求出橢圓方程式來：

因為直線CB的方程式為

$$y = \frac{r}{p-a}(x-a)$$

直線AQ的方程式為

$$y = \frac{-(p+a)}{r}(x+a)$$

由上二式可消去 r 得

$$y^2 = -\frac{(p+a)}{(p-a)}(x^2 - a^2)$$

即

$$y^2 + \frac{(p+a)}{(p-a)}x^2 = \frac{(p+a)}{(p-a)}a^2$$

令 $\frac{(p+a)}{(p-a)}a^2 = b^2$ ，即得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

這就是橢圓的一般方程式。

在上述的演算中，我們令 $\frac{(p+a)}{(p-a)}a^2 = b^2$ ，這兒有一些問題值得老師們在課室中教學：

(a) 因為 $\frac{p+a}{p-a}a^2 = b^2$ ，所以 $\frac{p+a}{p-a} > 0$ ，這是不是合理？又為什麼？

(b) a 與 b 的大小關係又如何？

下面的一些問題，也許可做為學生活動，老師們也可用來發問學生：

(a) 線段 AB 的中點 T 叫做此橢圓的中心，你能求出它的座標嗎？

(b) 過 T 作一直線垂直於 $\overline{AB}$ ，交橢圓於 D 與 E，線段 AB，DE 分別稱為橢圓的長軸與短軸，你知道它們的長嗎？

(c) 以 D 為圓心，a 為半徑作圓交長軸於 F(c, 0) 與 F'(-c, 0) 二點，F 與 F' 稱為此橢圓的焦點，你知道 a，b 與 c 三者之間的關係否？

(d)在橢圓上任取一點P，試先求PF與PF'線段長之和，你知道若P點任意改變，那麼它們的和是否也跟著改變？

(e)作直線 $x = \frac{a^2}{c}$ (如圖4)，此直線稱為準線在橢圓上任取一點P，過P作一直線與準線垂直交準線S，你知道比值 $\frac{FP}{PS}$ 嗎？如果P點改變，那麼這比值也會改變嗎？此比值稱為橢圓的離心率。

(三)雙曲線

下述所討論的方法只能作出雙曲線的一支，但可由此知道整個雙曲線的圖形。

1 作法

1 在方格紙上畫一平行於最長邊的直線，此即為x軸(參見圖5)。

2 在x軸上取一點A(-a, 0) $a > 0$ ，並在A之右邊取一點B(a, 0)。

3 作一直線垂直於AB，並令此直線為 $x = p$ 。(當然垂直應是AB的中點)

4. 在直線 $x = p$ 上取一點C(p, r)並連AC與BC。

5. 作 $\overline{BQ} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{BQ}$ 交 $\overline{AC}$ 於R(x, y)，此R即為雙曲線上之一點。

6. 仿第4.與第5.步驟求出20個R點，並用平滑曲線將這些點連接起來，即得雙曲線的一支(如圖6)。

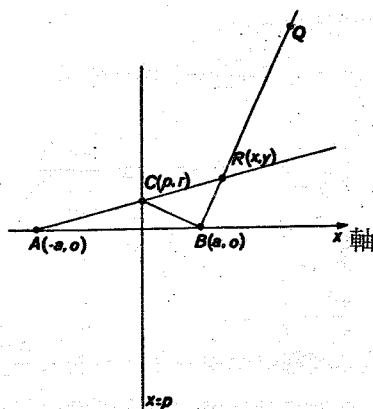


圖5

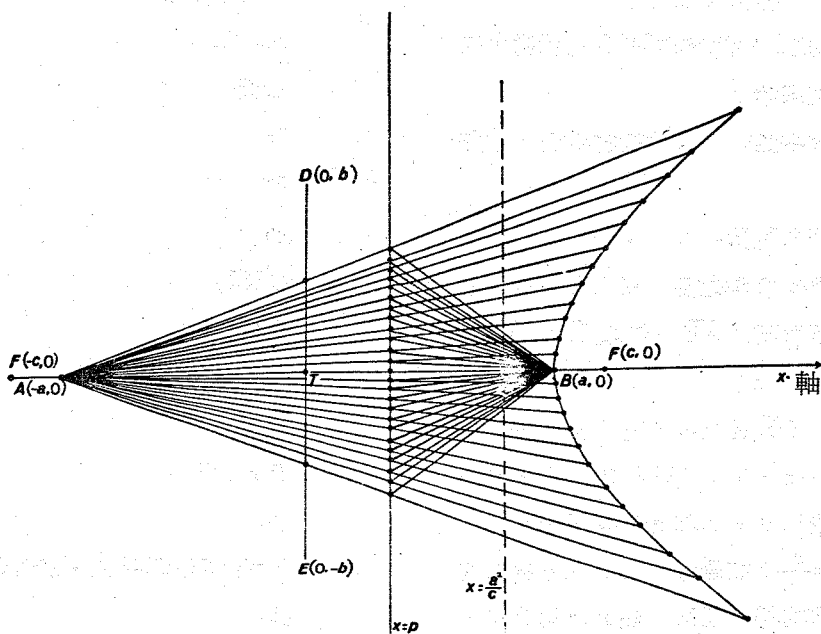


圖6

2 教學活動

利用上述的作法作出的圖6，教師可以在教室中進行下列的教學：

首先可以試著推出對應的一般方程式如下：

因為直線AC的方程式為

$$y = \frac{r}{p+a}(x+a)$$

直線BQ的方程式為

$$y = \frac{(a-p)}{r}(x-a)$$

由上二式消去 r 得

$$y^2 = \frac{(a-p)}{(p+a)}(x^2 - a^2)$$

即

$$\frac{(a-p)}{(p+a)}x^2 - y^2 = a^2 \frac{a-p}{p+a}$$

令 $\frac{a-p}{p+a}a^2 = b^2$ ，則得

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

如同在橢圓裡的教學一樣，我們令 $\frac{a-p}{p+a}a^2 = b^2$ ，有一些問題值得提出來在課室中討論：

(a)因為 $\frac{a-p}{p+a}a^2 = b^2$ ，所以 $\frac{a-p}{p+a} > 0$ ，這合不合理呢？

(b) a 與 b 之間的關係又如何？

下面的一些問題，可以作為學生的活動，老師也可以用來發問學生：

(a)線段 AB 的中點叫做雙曲線的中心，你知道它的座標嗎？

(b)如同在橢圓裡討論一樣， a 與 b 分別稱為雙曲線的半長軸與半短軸之長。在 $\overline{AB}$ 上取一點 T ，過 T 作一直線垂直於 $\overline{AB}$ ，並取 $\overline{TD} = \overline{TE} = b$ ，則 $D(0, b)$ 與 $E(0, -b)$ 。

(c)以 T 為圓心， $\overline{DB}$ 長為半徑畫弧交 x 軸於 $F(c, 0)$ 與 $F'(-c, 0)$ ，則 F 與 F' 為此雙曲線的焦點，你能求出 a ， b 與 c 的關係嗎？

(d)作直線 $x = \frac{a^2}{c}$ (如圖6)，這直線稱為雙曲線的準線，在雙曲線上任取一點 P ，過 P 作一直線垂直於準線並交準線於 S ，你知道比值 $\frac{\overline{FP}}{\overline{PS}}$ 嗎？如果 P 點改變，那麼這比值會顯著改變嗎？

此比值稱為雙曲線的離心率。

(e)在雙曲線上任取一點 P ，求 $\overline{F'P} - \overline{FP}$ 之值，你知道此值與什麼有關聯嗎？如果 P 點改變，那麼這個值會不會也跟著改變呢？

參考文獻

A. Coxford classroom inquiry into the conic sections, The Math. Teacher, LX (April 1967) p315-322.

實驗室中致癌藥品

黃寶鈿

美國職業安全及健康管理局 (U. S. Occupational Safety and Health Administration)，列出 269 種化學藥品為致癌因子 (Carcinogen)，並刊登於 Chemical and Engineering News, 31 July 1978. p.20-22，頗值注意，其中在中學實驗室中常見者如下：

乙醯胺 (acetamide)

$\text{Cr}(\text{CH}_3\text{COO})_3$

$\text{Pb}(\text{CH}_3\text{COO})_2$

Ar_2O_3

石棉

苯

砷

鎘

CdCl_2

CdSO_4

CCl_4

氯仿

PbCrO_4

鉻

$\text{Pb}(\text{CH}_3\text{COO})_2 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$

鎳

$\text{Ni}(\text{CH}_3\text{COO})_2$

單寧酸 (Tannic Acid)