專欄　國立臺灣師範大學　物理系

# 照度平方反比律的驗證

沈青嵩 姜瑞堂

## 一、前言

平方反比定律是宇宙中最基本的自然率之一，如萬有引力及庫倫靜電力，經嚴密的實驗證實其間作用力的大小與距離的平方成反比。點光源的照度從理論上很容易證明它也遵守平方反比律，假設光源的發射功率保持定值，t 秒後光子將均勻地散佈在以點光源為圓心、r 為半徑的球殼上，照度的物理意義為單位面積、單位時間所接受的光能；由於球殼的表面積為 $4\pi r^2$，所以照度 $I=K\frac{P}{4\pi r^2}$，式中 P 為點光源之發射功率，r 為測定照度點與光源的距離，K 為與光源及距離無關之比例常數。由上述的方程式，明顯地看出照度與距離的函數關係合乎平方反比定律。

實驗的驗證有很多種方法，本文所介紹的，係以簡單自製儀器，求得各點的相對照度，再對數據加以分析解釋。

## 二、適合年級

高中三年級

## 三、配合教材單元名稱

高三物理照度單元。（例如東華書局印行之高級中學物理學第二十四章第一節：光的質點模型）

## 四、本實驗活動後學生應發現之主要科學概念

1. 照度與距離的平方成反比。
2. 光電晶體的光電流與光通量成正比。
3. 電晶體對電壓具有放大的作用。
4. 照度為單位面積單位時間所接受之光能。

## 五、本實驗活動中學生應發展之主要科學技能

1. 設計實驗，驗證照度的平方反比律。
2. 運用線性最小平方法（ linear least squares fitting ），尋找兩變量間的函數關係。
3. 控制變因，進行相對照度與距離之測定。
4. 運用數字，進行演算。
5. 解釋實驗數據中所含之物理事實。

## 六、本實驗後應達成之學習行為目標

1. 能分辨電晶體各極的名稱及功用。
2. 能指出光電晶體的工作原理。
3. 能解釋歐姆定律之意義。
4. 能說明照度之物理意義。
5. 可確信照度與距離的平方成反比。

6. 可養成細心、客觀的科學態度。

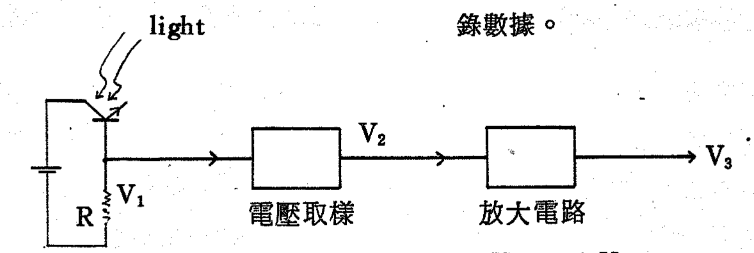
## 七、原理：

npn 型的光電晶體，若只取用集極（Collector）及基極（Base），其功能相當於光二極體。施以此光二極體固定的逆向電壓時，二極體的 p-n 接合面產生位能障壁，使電流值幾乎爲零，不完全等於零的原因，是來自 p-n 接合面的反向飽和電流。一個反向偏壓的 p-n 接合體被照時，通過二極體的電流 I 應爲光電流 $I_s$ 及反向電流之和，式中右邊第二項即爲反向電流

$$I = I_s + I_o\left(1 - e^{\frac{V}{NV_T}}\right)$$

，$I_o$ 爲反向飽和電流。N爲參數，對矽質半導體而言其值爲2，$V_T$ 在常溫下約爲0.026 伏特。V 爲所加電壓，反向爲負，正向爲正。本實驗所加反向偏壓爲 15 伏特，即 $V=-15v$，則 $I_o\left(1-e^{\frac{V}{NV_T}}\right) \simeq I_o \simeq 10^{-6}$ 安培與光電流（$10^{-3}$ 安培）比較小到可以忽略，所以流經二極體的電流 I 幾乎就是光電流 $I_s$ 了，即 $I \simeq I_s$。

光電流的大小是與照度的大小成正比，這個原理跟光電效應相類似，當光照射 p-n 接面時，會使半導體產生額外的電子—電洞對，載體增加了，而新增加的電子—電洞對與單位面積、單位時間所接受光子的數目成正比，在相同光源下也就是與照度成正比，所以光電流 $I_s$ 與照度成正比，因 $I \simeq I_s$，也可說是流經二極體的電流 I 與照度成正比。




(A) $V_2 = V_1$ $V_3 = 100\ V_2$

從歐姆定律可知電壓V與 I 成正比，將電壓放大後，利用三用電表讀取之電壓值 $V_3$ 當與照度成正比。因此在各不同點讀取電壓值，而得到多組 $V_{3i}$，$d_i$ 數據，對這些數據加以分析即可驗證照度是否遵守平方反比律。

## 八、所需器材儀器

三用電表、長尺、小燈泡、電源供應器、焊槍及如圖 1 所需之電子零件。

## 九、實驗步驟

1. 將測光電路接好如圖 1 所示。（從前述之分析知 $V_1$ 與照度成正比，次經電壓取樣 $V_2=V_1$，再經電壓放大電路，$V_3=100V_2$，請見圖 1 之(A)部份）

2. 把電路片豎起，使用一個 5W的小燈泡當點光源，調整燈泡高度與二極體同一水平，作垂直入射　需在暗室進行實測。

3. 歸零；將圖 1 (B)中 2 的接點連至 0 點，則 IC 1 的輸入電壓爲零，點 3 之輸出亦當爲零。若不爲零，調整可變電阻 $R_1$、$R_2$ 使點 4 輸出爲零。

4. 切斷電源，把點 2 連至點 1，再接上電源，由 d＝10 cm 量起，記下電壓 $V_3$ 與距離 d 的數據。

5. 將 d 逐漸增加，每增加 2 cm 記錄一次數據，直到 d＝30 cm 電壓不易測出爲止，共有11組數據。

6. 在相同 d 處，各點來回量取 5 次，逐一記錄數據。

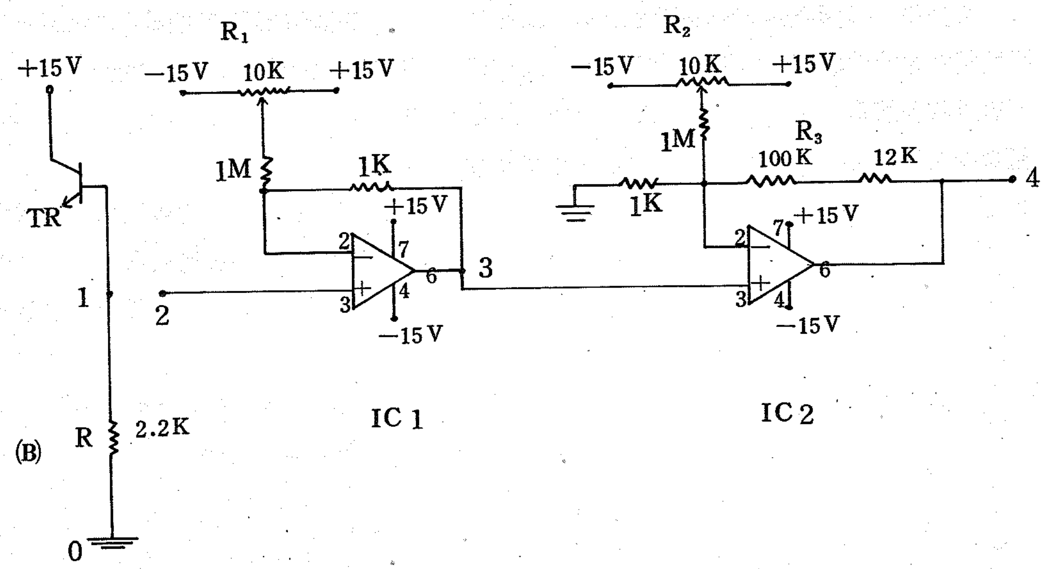



圖 1 ：電路圖　TR : pho To TRANSISTOR NPN type.

IC1、2 : $\mu$A 741 Operation Amplifier.

## 十、實驗結果與分析

1.實驗數據如下表

| d ( cm) | $V_{3j=1}$ | $V_{3j=2}$ | $V_{3j=3}$ | $V_{3j=4}$ | $V_{3j=5}$ | $\overline{V}_3$ | $\sigma$ | log d | log $V_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10.0 | 1.60V | 1.65 | 1.60 | 1.60 | 1.60 | 1.61 | 0.03 | 1.0 | 0.2 |
| 12.0 | 1.15 | 1.15 | 1.15 | 1.15 | 1.10 | 1.14 | 0.02 | 1.08 | 0.057 |
| 14.0 | 0.80 | 0.80 | 0.90 | 0.90 | 0.85 | 0.855 | 0.04 | 1.15 | -0.068 |
| 16.0 | 0.60 | 0.675 | 0.65 | 0.65 | 0.65 | 0.645 | 0.02 | 1.20 | -0.19 |
| 18.0 | 0.50 | 0.525 | 0.50 | 0.50 | 0.50 | 0.505 | 0.01 | 1.26 | -0.3 |
| 20.0 | 0.40 | 0.425 | 0.425 | 0.40 | 0.425 | 0.415 | 0.01 | 1.3 | -0.38 |
| 22.0 | 0.35 | 0.35 | 0.35 | 0.33 | 0.35 | 0.346 | 0.008 | 1.34 | -0.46 |
| 24.0 | 0.275 | 0.30 | 0.30 | 0.25 | 0.30 | 0.285 | 0.02 | 1.38 | -0.55 |
| 26.0 | 0.25 | 0.25 | 0.25 | 0.25 | 0.25 | 0.25 | 0.0 | 1.41 | -0.60 |
| 28.0 | 0.23 | 0.21 | 0.20 | 0.20 | 0.215 | 0.211 | 0.01 | 1.45 | -0.68 |
| 30.0 | 0.20 | 0.175 | 0.20 | 0.185 | 0.19 | 0.19 | 0.009 | 1.48 | -0.72 |

表中　$\overline{V}_3$ 即五次量度的平均值，$\overline{V}_3 = \dfrac{\sum_{j=1}^{5} V_{3j}}{N}$ ，N＝5

$\sigma$ 爲標準差（ Standard deviation ）

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{5} (V_j - V)^2}{N}} \quad , N = 5$$

2.先作 $V_3$ 對 d 的函數圖如圖 2 所示，也就是照度與距離的函數圖，圖中各點的上下箭頭長短，表示其差誤範圍，$\overline{V}_3 \pm \sigma$ 從圖形上觀察，非常近似平方反比律，欲求肯定，再用最小平方法找出照度與距離的函數關係。

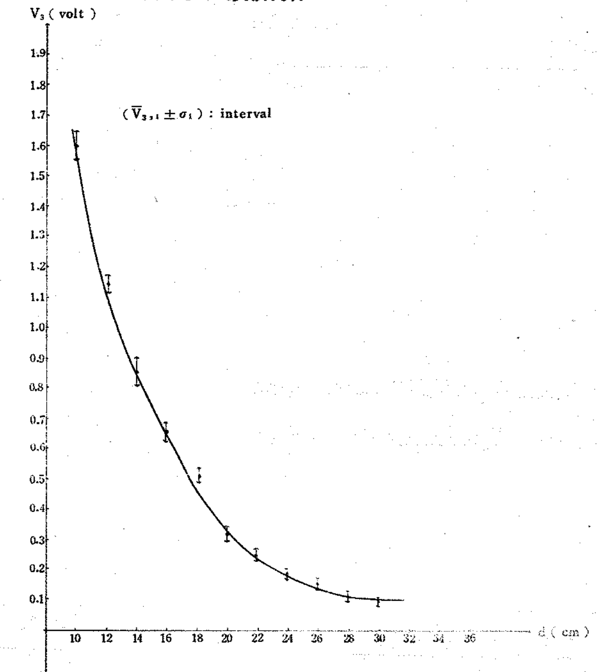



圖2：$V_3$－d 圖（相當於照度－距離圖）

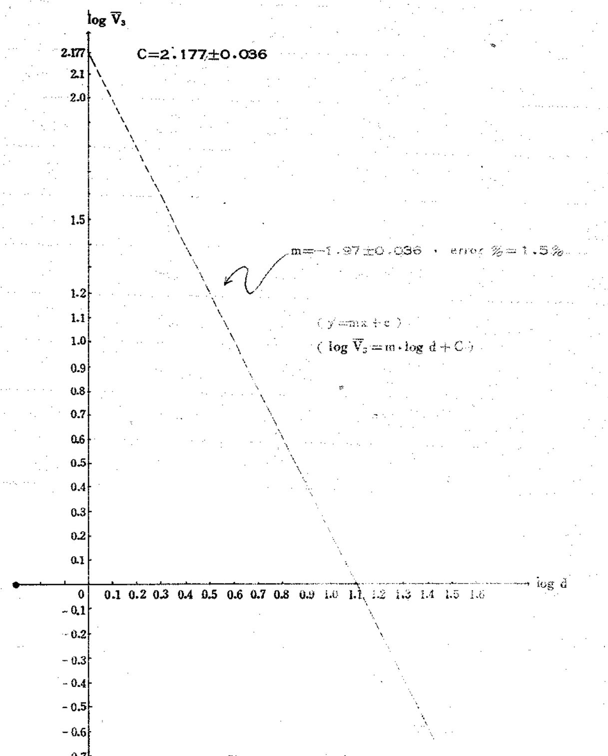



圖3：log $\overline{V}_3$－log d 圖

假設電壓 $\overline{V}_3$ 與距離 d 之函數關係爲 $\overline{V}_3 = a d^m$

則 $\log \overline{V}_3 = \log a + m \log d$

設 $\log \overline{V}_3 = y$，$\log d = x$，$\log a = c$

則 $y = c + mx$

故需利用線性最平方乘法處理，式中 c 爲截距，m 爲斜率。觀察數據表各 $\overline{V}_3$ 的標準差（ $\sigma$ ）相差不大（均爲 $10^{-2}$ ），爲簡化計算起見，可視爲相同，則：

$$\sum_i x_i y_i = c\sum_i x_i + m\sum_i x_i^2 \qquad i = 1, 2, \cdots 11$$

$$\sum_i y_i = cn + m\sum_i x_i \qquad n = 5$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i & \sum x_i^2 \\ n & \sum x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ m \end{bmatrix}$$

從實驗數據算得

$$\sum_{i=1}^{11} x_i = 14.05 \qquad \sum_{i=1}^{11} x_i^2 = 18.187$$

$$\sum_{i=1}^{11} x_i y_i = -5.189 \qquad \sum_{i=1}^{11} y_i = -3.691$$

$$\therefore \begin{bmatrix} -5.189 \\ -3.691 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14.05 & 18.187 \\ 11 & 14.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{14.05}{2.65} & \dfrac{18.187}{2.65} \\ \dfrac{11}{2.65} & -\dfrac{14.05}{2.65} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5.189 \\ -3.691 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.177 \\ -1.97 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \sigma_c \\ \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.036 \\ 0.036 \end{bmatrix}$$

$\therefore c = 2.177 \pm 0.036$

$m = -1.97 \pm 0.036$

3.截距爲 $2.177 \pm 0.036$，斜率爲 $-1.97 \pm 0.036$，即 $\log a = 2.177 \pm 0.036$，$m = -1.97 \pm 0.036$ 如圖 3 所示。截距的物理意義不大，是由衆多常數相乘而得。

斜率爲 $-1.97 \pm 0.036$ 表 $\overline{V}_3 = a d^m = \dfrac{a}{d^{1.97}}$，

（下接 66 頁）

$$(Q_3)\begin{cases} N = nA_1 + r \\ (n-1)A_1 = nA_2 + r \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n-1)A_{n-1} = nA_n + r \end{cases} \quad (0 \le r < n)$$

$$(Q_4) \quad (n-1)A_n = nB + r' \quad (0 \le r' < n)$$

類似上面的作法，設法消去 $A_1$ 、……、 $A_{n-1}$ 可得

$$(n-1)^{n-1}N = n^n A_n + r\,[(n-1)^{n-1} + \cdots\cdots + n^{n-1}]$$

$$= n^n A_n + r\,[n^n - (n-1)^n]$$

考慮(3) $(n-1)^{n-1}X = n^n Y + r\,[n^n - (n-1)^n]$，X，Y為未知整數。則（N，$A_n$）是(3)的解，而且，由（$Q_4$）知 $(n-1)A_n - r'$ 能被 n 整除。

由問題一的解答知(3)的通解是 $x = \ell n^n - r(n-1)$，$y = \ell(n-1)^{n-1} - r$ 若要再滿足（$Q_4$），則 $(n-1)(\ell(n-1)^{n-1} - r) - r'$ 需能被 n 整除，即 $\ell(n-1)^n - r(n-1) - r'$ 要能被 n 整除。因為 $\ell$ 越大，則對應的 x 越大，而且 $\ell = 0$ 時，$x < 0$，$\ell = 1$ 時，$x > 0$，故要求 N，只要一個最小的正整數 $\ell$，使得 $\ell(n-1)^n - r(n-1) - r'$ 可被 n 整除。

因為 $(n-1)^m = n^m - mn^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}n^{m-2} + \cdots\cdots + (-1)^{m-1}mn + (-1)^m$，除了最末項都可被 n 整除，於是 $\ell(n-1)^n - r(n-1) - r'$ 可被 n 整除的充要條件為 $\ell(-1)^n + r - r'$ 可被 n 整除。

n 為偶數時，若 $r < r'$，取 $\ell = r' - r$，若 $r \ge r'$，取 $\ell = n + r' + r$ 即可。

n 為奇數時，若 $r > r'$，取 $\ell = r - r'$，若 $r \le r'$，取 $\ell = n + r - r'$ 即合乎所求。

所以，問題二的解答是：n 為偶數時，若 $r < r'$，則 $N = (r' - r)n^n - r(n-1)$，若 $r \ge r'$，則 $N = (n + r' - r)n^n - r(n-1)$。

n 為奇數時，若 $r > r'$，則 $N = (r - r')n^n - r(n-1)$，若 $r \le r'$ 則 $N = (n + r - r')n^n - r(n-1)$。

我們原來的謎題，即相當於 $n = 5$，$r = r' = 1$ 的情形，所以，五位旅客最初所發現的椰子至少有 15621 個。又 $n = 5$，$r = 1$，$r' = 0$ 時，$N = 3121$，此為謎題第二種問法的答案。

## 參考資料


1. 李元慶編：每週猜謎彙編　第 76 頁至 77 頁
2. Martin Gardner 著：More Mathematical Puzzles and Diversions，第 82 頁至 87 頁


（上接 50 頁）

但因 $\bar{V}_3$ 與照度 A 成正比，所以 $A \propto \frac{1}{d^{1.97}}$，理論值為 $A \propto \frac{1}{d^2}$，實驗誤差僅為 1.5％，我們可以結論為：本實驗證實光的照度的確遵守平方反比率。

### 十一、問題探討

1. 你能說明光電晶體的工作原理嗎？
2. 你能解釋照度為何與距離平方成反比嗎？
3. 照度的物理意義為何？
4. 電晶體的原理與作用為何？就你所知盡可能回答。
5. 數據處理的程序為何？如何決定兩變量的函數關係？
6. 本實驗控制之變因為何？
7. 你能設計一個類似的實驗以驗證光的照度與距離平方成反比嗎？

### 十二、參考資料


1. Millman: Integrated Electronics, 1972.
2. Bevington: Data Reduction and Error Anaysis for the physical Sciences, 1969.