專欄　省立教育學院　科學教育系　數學組

多少椰子？

胡萩菁

本文討論兩個相關連的不定方程式（Diophantine equation）。問題原來的形式是個流傳很廣的謎題，內容大致如下：

一艘輪船在海上遇難，五位旅客及一隻猴子坐著救生艇被漂流到一座小島。島上寸草不生，更無人煙。還好，岸邊一處窪地堆積了不少漂來的椰子；這時天色已晚，大家也疲憊不堪，協議第二天再作處理，便紛紛趴在地上見周公去了！

到了半夜，有位旅客醒來，他深恐另外四人在夜裏偷竊椰子，因此偷偷地數了一下，發現必須拿去一個之後，方能被五整除。於是，他丟了一個給猴子，藏起了五分之一，便又倒頭呼呼大睡。一會兒，第二位旅客醒來，抱著相同的心理將椰子一數，也發現須要取去一個，才能等分成五份。他一樣地先拿了一個給猴子，再拿去五分之一，又去睡了。再一會兒，第三位旅客起來，同樣的丟了一個椰子給猴子，拿走了五分之一，然後繼續睡覺。人同此心，剩下兩位旅客也先後醒來，重複了前三人的行為。第二天一早，五位旅客起來，雖然覺得椰子少了許多，可是大家都不敢聲張。數一數剩下的椰子，巧得很，還是要拿掉一個，才能均分為五份。請問，最初他們發現的椰子最少有多少個？

這個題目，有另一種問法：假若第二天剩下的椰子恰可均分成五份，那麼，原來最少有多少椰子呢？

我們暫時不解答上面的問題，直接來研究推廣的情形。假設情況是 n 個旅客和一隻猴子漂流到荒島，發現了一大堆椰子，n 個人先後於半夜醒來，丟了 r 個（$0 \leq r < n$）椰子給猴子，再藏了 n 分之一。

問題一：若翌日早晨，一數所剩下的椰子也是必需再取走 r 個，才能平均分配，那麼最少有若干個椰子呢？

問題二：若第二天所餘的椰子，必需再取走 r′個（$0 \leq r' < n$），才能 n 等分，則椰子至少有幾個？

顯然問題二包含了問題一，可是問題一比較單純，所以我們先解問題一。設椰子個數為N，n 個人於半夜自行拿走的椰子數依次為 A_1，A_2，……，A_n，最後平分每人拿了 A_{n+1} 個。於是，由問題一的題意得

$$(Q_1)\begin{cases} N = nA_1 + r \\ (n-1)A_1 = nA_2 + r \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n-1)A_n = nA_{n+1} + r \end{cases} \quad (0 \leq r < n)$$

首先，設法消去 A_1、A_2、………、A_n

$$(n-1)^n N = (n-1)^n r + n(n-1)^n A_1$$
$$= (n-1)^n r + n(n-1)^{n-1}((n-1)A_1)$$

$=(n-1)^n r+(n-1)^{n-1} nr+n^2(n-1)^{n-1}A_2$

$=(n-1)^n r+(n-1)^{n-1} nr+n^2(n-1)^{n-2}((n-1)A_2)$

$=(n-1)^n r+(n-1)^{n-1} nr+(n-1)^{n-2} n^2 r+n^3(n-1)^{n-2}A_3$

$=\cdots\cdots\cdots$

$=(n-1)^n r+(n-1)^{n-1} nr+(n-1)^{n-2} n^2 r+(n-1)^{n-3} n^3 r+\cdots\cdots+(n-1)n^{n-1} r+n^n r+n^{n+1}A_{n+1}$

$=n^{n+1}A_{n+1}+r\,[(n-1)^n+(n-1)^{n-1} n+\cdots+n^n]$

$=n^{n+1}A_{n+1}+r\,[n^{n+1}-(n-1)^{n+1}]$

所以(N,A_{n+1})是X，Y的方程式

(1) $(n-1)^n X=n^{n+1}Y+r\,[n^{n+1}-(n-1)^{n+1}]$，X，Y爲整數。的一組正整數解。逆行上面的計算，不難得知N是方程式(1)中X的最小正整數解。關於方程式(1)，若(x_0, y_0)，(x_1, y_1)是二組解，則得$(n-1)^n(x_1-x_0)=n^{n+1}(y_1-y_0)$，因爲n和n－1互質，故$x_1-x_0$可被$n^{n+1}$整除，所以$x_1=x_0+\ell n^{n+1}$，$y_1=y_0+\ell(n-1)^n$，$\ell$是某個整數。

反之，設(x_0, y_0)是一組解，ℓ是隨便某一整數，則$x_1=x_0+\ell n^{n+1}$，$y_1=y_0+\ell(n-1)^n$也是解。

所以，要解(1)式，只要能找到一解(x_0, y_0)，就可獲得全部的解，從而可確定N。

爲了找(x_0, y_0)我們回頭研究原來的(Q_1)，考慮U、V的方程式

(2) $U=nV+r$，U，V爲整數。

則(N, A_1)、$((n-1)A_1, A_2)$、………、$((n-1)A_n, A_{n+1})$都是(2)的解，所以，我們可以認爲(Q_1)是由n＋1個如(2)型態的式子組成。只是A_i和A_{i+1}還有某種連鎖關係。爲了顧及這些關係，我們定義一個從R×R到R×R的映射T如下：

對$(x, y)\in R\times R$

令$T(x, y)=\left((n-1)y, \frac{(n-1)y-r}{n}\right)$

由(Q_1)知$T(N, A_1)=((n-1)A_1, A_2)$，$T^2(N, A_1)=((n-1)A_2, A_3)$，……，$T^n(N, A_1)=((n-1)A_n, A_{n+1})$。所以，$(N, A_1)$，$T(N, A_1)$，………，$T^n(N, A_1)$都是(2)的解。設S是(2)的解集合，我們來看S中有那些元素經過T的多次作用，結果都還在S內，特別的，如果有某一$(x_0, y_0)\in S$，滿足$T(x_0, y_0)=(x_0, y_0)$，則(x_0, y_0)即符合所求。

設$(x_0, y_0)\in S$　則$x_0=ny_0+r$

$T(x_0, y_0)=\left((n-1)y_0, \frac{((n-1)y_0-r)}{n}\right)$

所以$T(x_0, y_0)=(x_0, y_0)\Longleftrightarrow x_0=(n-1)y_0$，$ny_0=(n-1)y_0-r$，

亦即　$y_0=-r$　$x_0=-r(n-1)$

如此我們找到方程式(1)的一解$(-r(n-1), -r)$。(1)的一般解即爲$x=\ell n^{n+1}-r(n-1)$，$y=\ell(n-1)^n-r$ 當$\ell=1$時，所得的x爲最小的正整數解。故問題一的答案是$N=n^{n+1}-r(n-1)$。

接著我們來解答問題二。仍然以N表椰子數，以A_1、A_2、………、A_n表n位旅客依次取去的椰子個數，B表最後一次平分的數目。由題意知

$$(Q_2)\begin{cases} N=nA_1+r \\ (n-1)A_1=nA_2+r \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & (0\le r<n) \\ (n-1)A_{n-1}=nA_n+r \\ (n-1)A_n=nB+r' & (0\le r'<n) \end{cases}$$

把它分成二部分

$$(Q_3)\begin{cases} N = nA_1 + r \\ (n-1)A_1 = nA_2 + r \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (n-1)A_{n-1} = nA_n + r \end{cases} \quad (0 \le r < n)$$

$$(Q_4)\quad (n-1)A_n = nB + r' \quad (0 \le r' < n)$$

類似上面的作法，設法消去 A_1 、……、A_{n-1} 可得

$$(n-1)^{n-1}N = n^n A_n + r\,[(n-1)^{n-1} + \cdots\cdots + n^{n-1}]$$
$$= n^n A_n + r\,[n^n - (n-1)^n]$$

考慮(3) $(n-1)^{n-1}X = n^n Y + r\,[n^n - (n-1)^n]$，X，Y為未知整數。則（N，$A_n$）是(3)的解，而且，由（$Q_4$）知 $(n-1)A_n - r'$ 能被 n 整除。

由問題一的解答知(3)的通解是 $x = \ell n^n - r(n-1)$，$y = \ell(n-1)^{n-1} - r$ 若要再滿足（Q_4），則 $(n-1)(\ell(n-1)^{n-1} - r) - r'$ 需能被 n 整除，即 $\ell(n-1)^n - r(n-1) - r'$ 要能被 n 整除。因為 ℓ 越大，則對應的 x 越大，而且 $\ell = 0$ 時，$x < 0$，$\ell = 1$ 時，$x > 0$，故要求 N，只要一個最小的正整數 ℓ，使得 $\ell(n-1)^n - r(n-1) - r'$ 可被 n 整除。

因為 $(n-1)^m = n^m - mn^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}n^{m-2} + \cdots\cdots + (-1)^{m-1}mn + (-1)^m$，除了最末項都可被 n 整除，於是 $\ell(n-1)^n - r(n-1) - r'$ 可被 n 整除的充要條件為 $\ell(-1)^n + r - r'$ 可被 n 整除。

n 為偶數時，若 $r < r'$，取 $\ell = r' - r$，若 $r \ge r'$，取 $\ell = n + r' + r$ 即可。

n 為奇數時，若 $r > r'$，取 $\ell = r - r'$，若 $r \le r'$，取 $\ell = n + r - r'$ 即合乎所求。

所以，問題二的解答是：n 為偶數時，若 $r < r'$，則 $N = (r' - r)n^n - r(n-1)$，若 $r \ge r'$，則 $N = (n + r' - r)n^n - r(n-1)$。

n 為奇數時，若 $r > r'$，則 $N = (r - r')n^n - r(n-1)$，若 $r \le r'$ 則 $N = (n + r - r')n^n - r(n-1)$。

我們原來的謎題，即相當於 $n = 5$，$r = r' = 1$ 的情形，所以，五位旅客最初所發現的椰子至少有15621個。又 $n = 5$，$r = 1$，$r' = 0$ 時，$N = 3121$，此為謎題第二種問法的答案。

參考資料

1. 李元慶編：每週猜謎彙編　第76頁至77頁
2. Martin Gardner 著：More Mathematical Puzzles and Diversions, 第82頁至87頁

（上接50頁）

但因 $\bar{V}_3$ 與照度A成正比，所以 $A \propto \frac{1}{d^{1.97}}$，理論值為 $A \propto \frac{1}{d^2}$，實驗誤差僅為1.5%，我們可以結論為：本實驗證實光的照度的確遵守平方反比率。

十一、問題探討

1. 你能說明光電晶體的工作原理嗎？
2. 你能解釋照度為何與距離平方成反比嗎？
3. 照度的物理意義為何？
4. 電晶體的原理與作用為何？就你所知盡可能回答。
5. 數據處理的程序為何？如何決定兩變量的函數關係？
6. 本實驗控制之變因為何？
7. 你能設計一個類似的實驗以驗證光的照度與距離平方成反比嗎？

十二、參考資料

1. Millman: Integrated Electronics, 1972.
2. Bevington: Data Reduction and Error Anaysis for the physical Sciences, 1969.