

Poincaré

的非歐幾里得空間

邱日盛

我們在國中，高中學過「平行線公設」。

【公設1】 通過直線 l 外一點 P ，能作且僅能作一條 l 的平行線。

30 年前的初中教科書中，這個公設，被稱做「平行線公理」，且「公理」兩字的意義又被解說是「人人都知道，不需證明的真理」。

雖然，在我們的數學實驗中，這個公設為真，但，實際上無論我們怎樣做實驗，祇能做有限次，且在有限的範圍而已，又因為所利用的工具也無法達到最理想的程度，（無論使用那一種量角器都無法測出 10^{-10} 秒的角）。因此僅靠試驗與觀察，就斷定「人人都知道」就會發生問題，所謂「真理」云云也發生問題。為了解決這個問題，從前很多數學家，費了很多心血，想從歐幾里得的其他公設（除去平行線公設）證明這個平行線公設。可惜都遭遇失敗。差不多二百多年前，數學家們，就開始放棄這個念頭，創造與這個公設互不相容的公設（公理），建立了所謂「非歐幾里得幾何學」的數學。其中亦有保持歐幾里得的其他公設，如以下列公設 2 或公設 3 來代替歐氏的平行線公設的兩種非歐幾何學。

【公設2】 「同一平面上的任何二直線必相交。」（沒有平行線存在）

【公設3】 「通過直線 l 外的一點 P ，至少能作二條 l 的平行線」。

雖然，上面公設 1，2，3 兩兩互相矛盾，但都建立了完整無缺而很嚴謹的數學，同時也引起了今日數學，科學輝煌的發展與進步。

下面我想介紹其中一個極為有趣的 Poincaré 所構想而滿足公設 3 的幾何空間。

現在讓我們來脫離現在我們所居住的空間，來想像一個新的空間。

我們設想在這個新空間是被一個半徑很大的球面所包含，其中各點的溫度是隨其位置的不同而有所差異，其球心的溫度最高，其球面上及球面外的溫度為 0。設這球的半徑是 a ，其球內一點 P 與球心的距離是 r ，（ $0 \leq r < a$ ），在點 P 的溫度為 t ，而假設它們之間有下式關係：

$$t = c(a^2 - r^2), \quad \text{但 } c > 0, \text{ 且爲定數}$$

由上式我們可以了解，距離球心等距離的球面上各點，溫度相等。

其次我們再假定，在這空間中所居住的住民以及一切物體，在這空間內移動時，其體積（容積）是隨其所在地點的溫度變化而變（長度與溫度正變）。使得溫度接近 0 時，體積也跟着接近 0。（以上概念合乎物理原則，當然這裡的溫度單位特設的單位）

現在讓我們來想一想，假如，現在有這一種空間，而在這空間中又居有像我們人類一樣，具有理性的動物，那麼，這些動物創造幾何學時，

他們究竟會創造怎樣的幾何學。

第一 雖然從這空間外的人來看，這空間是有限的空間（半徑為 a ），但對於居住在這空間內的人來說，他們必定會覺得，他們的空間是無限大的空間。因為他們假如向這空間的邊緣行走，那麼隨着他進行的方向，溫度逐漸下降，因此其體積也跟着變小，其步伐也跟着變小，愈接近這空間邊緣的球面，其步伐也愈接近於 0，無論他如何繼續行走，他絕無法達到這空間的邊緣。因此他會覺得他們的空間，和我們的空間一樣，是有無限寬度。

第二 當這空間中的人，遠離球心時，他對於他身體所發生的變化會毫無自覺。因為認識物體大小是由比較別物體而來，換句話說，是利用基本測定標準物（尺）與該物的比較才能知道物體的大小。然而當他攜帶這個標準物行走時，他自己，以及標準物都以同樣的比例變化，因此無法發覺其變化的情形。

第三 在這空間中，連結二點間最短距離的線為圓弧。因此這空間中的直線（最短距離的線）應該是普通空間的圓弧。

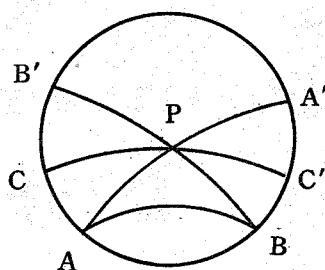
第四 在這空間中，通過二點的最短線有一且僅有一而已。

第五 這空間中的直線（即最短線）是，垂直於其邊緣球面的圓弧，而平面是垂直於其邊緣球面的球面。當這些直線，平面通過球心時，它們就變成普通的直線與平面。（以上第三，四，五的證明超過高中數學程度，因此省略）。

第六 在這空間中，通過直線 ℓ 外一點 P ，可作無窮多條 ℓ 的平行線。

如圖，設所給予的直線（圓弧）為 AB ， P 為 AB 外的任一點。通過 P 作直線（圓弧） AA' ， BB' 。則在 $\angle APB'$ ， $\angle A'PB$ 內所作的任意直線 CPC' ，與 AB 絕不相交。且這種 CPC' 直線有無窮多。因此通過直線 AB 外的一點可以作

無窮多 AB 的平行線。



對於居住在這種空間內的人們來說，歐幾里得所說的「通過直線 ℓ 外的一點，僅能作一條 ℓ 的平行線」，反而會成為不可思議。因此居住在這種空間中的居民，如果創造幾何學，最適合的，可能就是滿足上面〔公設 3〕的，所謂 Lobachevski 幾何學的數學。

再從另一方面來看，今日我們居住的宇宙，是否無限或是有限，實際上我們人類是現在無法答覆的問題。也許是我們居住在半徑很大，且具有上述條件的空間；Poincaré 的非歐空間內，不過我們人類所居住的地球很接近於這個空間的球心，使得我們無法感覺，實際上該用 Lobachevski 幾何學，但由於太接近球心，這個幾何學，很接近於歐幾里得幾何學而已。

參考書籍

陳蓋民著：非歐幾何學、商務

米山國藏著：數學之基礎

米山國藏著：數學之精神、思想、方法

（上接 63 頁）

物、黃敦友教授對有孔蟲、胡忠恒教授及程延年先生對介形小蟲各有研究報告。這一帶的生物生存的當時也可能是個淺海，水深一公尺左右、半鹹水的海岸地帶。假如嫌走太遠的路去白沙屯，本地也是一個很好的採集地。

誌謝

筆者等承蒙胡忠恒教授領導去白沙屯及龍港二地採集化石、鑑定圖版所用的化石，並修改本報告的文字，於此特申謝忱！