

奇妙的魔方陣

王傳林

(一)

6	7	2
1	5	9
8	3	4

每(直)行或每(橫)列之和都是15, 兩對角線上三數之和也是15。

這是最簡單的一種魔方陣, 由於 $1+2+\dots+9=45$, 而九個數分在三行, 每行之和必須是15。你是否曾想過一共有多少種不同的排法? 把以上的這個排法記作A, 把各數繞著5依逆時針方向移動九十度; 換言之2, 4, 8, 6四數仍在對角線上, 各數保持其相關次序; 再這樣做一次; 再做一次; 得

2	9	4	4	3	8	8	1	6
7	5	3	9	5	1	3	5	7
6	1	8	2	7	6	4	9	2

若再照做一次, 就回到A了。這些排法仍保持其各行、各列、兩對角線、八個和都是15。

8	3	4	2	7	6
1	5	9	9	5	1
6	7	2	4	3	8

上面左圖是把A的第一、三兩列交換而得; 右圖是把A的第一、三兩行交換而得。又

4	9	2	6	1	8
3	5	7	7	5	3
8	1	6	2	9	4

各是A的一個對角線不動, 再把A依此對角線反轉而得, 由此得到三階魔方陣的八種不同排法。或許你會想如果從A以外的另一個排法開始, 再做如上所述的一個轉動或一、三兩列交換或一、三兩行交換, 或一個反轉又可得到新的排法了。試試看, 不論你如何做仍是這八個排法中的一個。我們可以分析:

(1)中央的一數必須是5, 因為中央的一數要與四組二個數相加, 其他數都辦不到。因為比5大的數加9已等於或大於15, 再與第三數相加就超過15; 比5小的數加1小於6不能有第三數相加得到15。

(2)1, 3, 7, 9不能在對角線上, (何故? 請讀者自己分析)

(3)I表示不動, R, R^2, R^3 分別表示從某一排法依逆時針方向轉動90度、180度、270度; H表示第一、三兩列交換; V表示第一、三兩行交換; D及D'各表依45°的對角線及依135°對角線反轉。

列出下表:

	I	R	R ²	R ³	H	V	D	D'
I	I	R	R ²	R ³	H	V	D	D'
R	R				D'			
R ²	R ²							
R ³	R ³							
H	H	D						
V	V							
D	D							
D'	D'							

從任何一個排法開始都可以，為便利計可從已列出的排法A計算。表的算法是左邊先做再做上面的，例如R與H交會處，表示先做R再做H，可得D'；H與R交會處，表示先做H再做R可得D。讀者試把本表填寫完畢就可發現：三階魔方陣只有這八個排法。

(二)再看下面的四階魔方陣：

1	8	13	12
15	10	3	6
4	5	16	9
14	11	2	7

每行或每列四數之和都是34，兩對角線上四數之和也是34

在這裏也可作類似在三階魔方陣中所做的變換（轉動，列與列交換，行與行交換等）。例如：第一、三兩列交換且第二、四兩列交換，仍符合四階魔方陣的要求：

4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12
15	10	3	6

又如，第二、三、四各行，每行向左移一行而把第一行移到第四行，也符合要求。

問題1：讀者試把所有的這些變換都找出來，並對每一個變換指定一個英文字母代表它，如同上面在三階魔方陣中所做的，I代表不動，再

看這些字母是否也可以照三階的方式列一個計算表？

再看最初列出的四階魔方陣中：

(1)把十六個數分成上下左右四塊，每塊裏四個數之和也是34。

(2)四角上的四個數，其和也是34。

(3)中央的四個數，其和也是34。

問題2：你能再看出一些其他的性質嗎？

(上接83頁)

(11) Showalter, V., Cox, D., Holobinko, P., Tlomsom, B., "Unified Science Premises and Prospects.", The Federation for Unified Science Education, Columbus, Ohio, 1975.

(12) Neuraih, O., Bohr, N., Dewey, J., Russell, B., Carnap, R., Morris, C., "Encyclopedia and Unified Science.", The University of Chicago Press, Seventh Impression 1970.

(13) "New Trends in Integrated Science Teaching, Volume II.", The Unesco Press, 1973.

(14) "What is Unified Science Education?", FUSE, Box 3138, University Station, Columbus, Ohio 43210.

(15) Sabar, N., "Science, Curriculum, and Society: Trends in Science Curriculum.", Science Education, vol. 63, No. 2, April 1979.

(16) Time, November 14, 1977.

(17) Helgeson, S. L., Projector, "The Status of Precollege Science, Mathematic And Social Science Education: 1955-1975, General Executive Summary." Center for Science and Mathematics Education, The Ohio State University, 1977.