漫談量、數的問題——為何負乘負為正？

賴漢卿　（清華大學數學系）

從國小到國中的數學，剛遇到負數，總不易使學生適應，尤其是有關負數的運算，更使學生感到困擾。當然學校裏的數學，與現代數學的本質、構造是前後一貫的。所有問題發生的根源，是由量而後數，進而為簡化進到四則運算的技巧。故我們就從數與量的關係說起。

§1 數與量之間的關係

“量”這個名詞是數學之外的東西，但它在數學本質上確實是存在的。要從數學中去掉“量”這個外物觀念，是數學家以及數學教育家一向的願望。然而“數”要是離開了量，其結果將會是如何呢？

自古有數的開始，即以自然數列1，2，…之順序唱出，用加法來做為唱數的簡略化，而減法做為逆唱數法的簡略化，乘法為其同數加法的簡略化，除法為乘法的逆運算，此外再也沒有其他的了。這些算法在數的領域中，稱為四則運算。這種運算法則，說能與外界所發生的現象，或跟人類思考間，有密切的關連，實在一點兒也不明顯。因此數學乃形成一種自閉症，而被擱置在另一個世界裏。舉個例來說，矩形的寬3公分，長4公分求得其面積為

3公分×4公分＝12平方公分

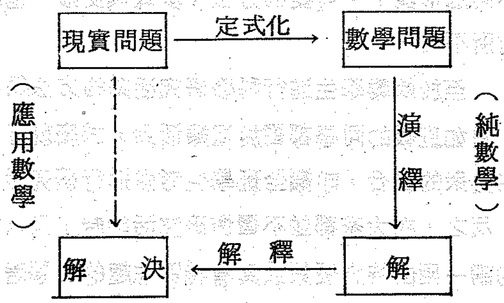
這是以【量×量＝量^2】所表現出來的，它是從【長×長】來決定面積。如果去掉其單位就成為

$$3\times4=12$$

我們知道這個答案是【12平方公分】這種過程，由量導出數的演算，是經抽象化，再以合理的運算法則，形成一個獨立的世界。這種數的概念，尤其是小數、分數，是由量（尤其是連續量）引導出來，其演算是以量的實際操作來說明。不過數與量仍分別處於不同的世界。問題就發生在如何連接這兩者間的關係，那就相當於今天談得最熱烈的所謂應用數學與純數學之間的關係與對照。

§2 解決問題的圖示
應用數學 ⟷ 純數學

首先我們要瞭解，今天我們為什麼要學數學？可說除了一部份的數學家，是以本體的自我興趣為目的外，絕大多數的人，是想利用數學來解決種種的現實問題，或求獲解決的方針及策略。學數學也有一些人認為可以用來訓練人的腦力，使其靈活聰明。因此由小學而中學，甚至於大學的某些科系，都接連不斷的學習不少數學。數學要解決現實問題，往往以下面簡單圖示來推行。



這是給應用數學與純數學間的一個很好的寫照。為了去解純數學問題，我們就得探視現實世界中，典型而能表現其模型的，以其現實的操作，反回來做為解數學問題的開展。這裡我們應認知上述圖示的循環性，它能自由地運轉，來認識學習數學的合理性及必要性。故應用數學乃藉純數學的演繹而解決，而純數學也藉應用數之所需，得

以開展走向前峰領導，兩者相互為用，不易分開，更不易有界限，就像彩虹的顏色，在色與色之間是不容有界限來分清楚。所以不論是純數或應數，都屬數學本家。

我們舉個簡單的實例，說明上面圖示的過程。設某商店售有兩種商品，共有10件，其中一種售價為200元，另一種為400元，全部售完時得款2800元，現在查問各種商品究竟各有幾件。

這個問題首先該定式化，我們就設商品分別為x件、y件，要是去其單位，可列成下面方程式：

$$\begin{cases} x+y=10 \\ 200x+400y=2800 \end{cases}$$

$$\text{或}\begin{cases} x+y=10 \\ 2x+4y=28 \end{cases} \qquad (◈)$$

經演繹後，我們很快就解得 $x=6$，$y=4$。這個解回過頭來解釋，則為商品之一為4件，另一為6件，這樣便算把問題解決了。

上例如果僅以解方程式（◈）來觀察，是屬於純數學的問題。此方程式可不只用在商品，也可適用於其他的實際問題。譬如說有關雞兎算的問題：若雞兎共有10隻，算其脚的總數有28支，試問雞兎各有若干？相信每一個人所列出的方程式就是（◈）式，所以其解 $x=6$，$y=4$ 便該解釋成：雞6隻、兎4隻，則問題乃圓滿解決。

§3負數問題的發生及其故事

在某一天和一位學應用科學的教授在閒談間，聽他說在我們人世間，最無理地運用腦筋的，可能要算數學家了。於是反問他，「那麼那些人，算是最自然的在使用腦筋呢？」，得到的回答是政治家。從他的語意，我們可意味到在人世間，數學是給一般人感到頭痛的一門科目。可是仍有不少人會贊同數學可帶給人類，持以堅强的判斷力，以及說服性。蓋因它有一種眞理法則，使人不得不信服。所以我們一向無法放棄學習起碼的基本數學。我們再看看某作家在某文章中，有下面一段話：

「我對負數的概念，從借款或玩牌所輸之點數來着想，則尚能體味其意義，但負數乘負數為正數的觀念，却從來無法真正接受。在中學時代，學數學時，老師說『這是公理，無法證明，只要大家死背而能用即可』，因此在我幼小的心靈中，直到現在還是無法消除此疑問」。

這位先生在他整篇文稿的旨意是談論「學校的教育又在偏向科學時代的覆轍了」。就像今天聯考，其命題以配合電腦閱卷所出選擇題一樣，逐漸地誘使學生投機，不深入理解，使一般正常的數學教育亮起了紅燈，無法施展，也加深了升學主義思想。這些事項原不在我們談論的範圍，我只不過是想引用這一段文章，敬告我們學數學的人，以及數學教育者，以此借鏡警惕自己，該站穩立場開拓下一代的數學教育。我們都很清楚，數學思想是極忌模糊曖昧，它原本是愛好眞理、思路嚴密的一門學問，但這位先生對其所學的數學，常懷此疑問，要是敎他數學的老師知道了，一定會感到非常遺憾的。學校之敎學，在受限制的時間內，欲使多姿多樣的小孩們所發生之疑問，給予正確的解決，並不是一件容易的事。然而要是能給予某些啓示或說明，在觀念上必有所裨益。

負數的想法，許多是違反常識，如負2個蘋果，負3個盤子，它們到底具有什麼意義呢？更有進者，在負3個盤子上各裝負2個蘋果，能答說「懂」的學生，那才是怪事，答說不懂的倒是健全的思想。如果以負量表示向某人借款的意味，而正量表其財富，則

「借1萬元乘借50萬元，則有50萬財產」

更會使人不瞭解。這就示明負數及其乘法，該有待說明。

古代以理論及直觀幾何著名的希臘數學家們，允有分數與無理數，却不承認有負數。Pascal（1623～1662）也曾說「比0小的數是無意義

的」。

開始使用負數的是不太受邏輯（論理）干擾的我國與印度。在我國古代的「九章算術」就在竹簡記有正、負的計算法。印度在七世紀時，就有數學家用負數，而到十二世紀時，曾有下面一段敍述：

正數的平方或負數的平方都是正。正數的平方根有二，其一為正，另一為負。負數的平方根不存在，蓋因負數不是平方數。

不過這裡說的有點過份，要是以財富爲正，借款爲負，則依其語意變成

「財富與財富之乘積，以及借款與借款的乘積，都是財富，財富與借款之乘積為借款」。

這是不合理的情形。因而有意大利的數學家Cardano（1501～1576）說：

「負乘負爲正的規則是錯誤的」

這是持相反看法的一種很好的對照，同時也告訴我們，負數與負數的乘積，是古時候一個難題，想要草率解決是不可能的。更從Pascal及Cardano所說的話題，使我們不得不小心求證。

§4 負數的意義

考慮正數與負數的產生，可從錢財計算來說，我們列如下表，當易於理解正、負數的觀念：

正		負
收入	⟷	支出
放款	⟷	借款
資產	⟷	負債
獲利	⟷	損失

例如某家庭在某月份收入分別爲父親3萬元，哥哥1萬元，但媽媽生病花了5萬元，則此家庭在此月份的總收入爲

$(+3)+(+1)+(-5)$

$=3+1-5=-1$（萬元）

這表示此家庭在該月份是紅字一萬元，收入成爲負數。如果再說該家庭在此月份，做父親的在其收入中，必需以其收入的一半捐救國自强基金，而媽媽的醫藥費可從公保補貼一半，則此家庭在該月的總支付（收入的負數）可寫成

$(-1.5)+(-1)-(-2.5)$

$=-1.5-1+2.5=0$

這就表示收支平衡，無紅字發生。

正、負的另一個起源，表示對於基準值之過與不足的意思，就像古時候，德國某商店批發貨物，在裝貨物的諸箱子中，如超過其規定量之箱子上，則印以“＋”，不足量的箱子上，則印以“－”。又人口的增減也以＋、－表現，溫度計也以＋、－表示等等。

一般情形則有Descart所創之數直線上，對某基準點（爲原點），在其右邊的數表示正數，在其左邊的數表示負數，如

… -3 -2 -1 0 1 2 3 …

這個數線給予後世的影響至鉅。許多物理量抽象化後，可在數線上表示出來，如每小時向左走3公里，經2小時後，轉向右走1小時，結果此人進至何處？我們可用向左表負，向右表正來計算，就有下式

$(-3)\times 2+(+3)\times 1$

$=-3-3+3=-3$

即此人走向左3公里。

§5 負數乘負數爲正的規則

若以資產的增、減表示正、負，則以資產5萬元，用同額拋棄3次，則其資產就成爲

$(+5)\times(-3)=-15$

（表示減少15萬的資產）

又若資產每次應減少5萬元，今放棄減少同額資產有3次，則其資產總額就變成

$(-5)\times(-3)=-(-5)-(-5)-(-5)$

$=5+5+5=15$

表示三次不使其各減少5萬，與增加15萬元資產是同意義。

從這一段實例，可用來佐證：負乘負爲正的規則。以數學的運算法則來說明，我們可用演繹

法或恐嚇法（即歸謬法）的幾種方式證明“負乘負為正”。

(1)**演繹法**(i 先設N表示自然數的全體（包含0），$N\times N=N^2$ 表示從N中任取x，y成對（x，y）。

定義函數$m:N\times N \to N$ 為將數對（x，y）映射到N中之某一數，若m滿足條件

(i) $m(x,0)=0$

(ii) $m(x,y+1)=m(x,y)+x$

並定義此函數值為x，y的乘積，即$m(x,y)=x\times y$。這種概念推廣到整數全體Z（含正、負）上，且仍定義$m:Z^2 \to Z$為$m(x,y)=x\times y$ 而滿足條件(i)、(ii)。以此我們可證明

$$(-1)\times(-1)=1$$

事實上是

$$\begin{aligned}0&=m(-1,0)\\&=m(-1,-1+1)\ (\text{條件(i)})\\&=m(-1,-1)+(-1)\ (\text{條件(ii)})\end{aligned}$$

將−1移到等號的左邊，則得

$$m(-1,-1)=(-1)\times(-1)=1$$

(2)**演繹法**(ii) 以分配律及幾何圖形證明負數乘負數為正。

(a)先用分配律證明$(-1)\times(-1)=1$

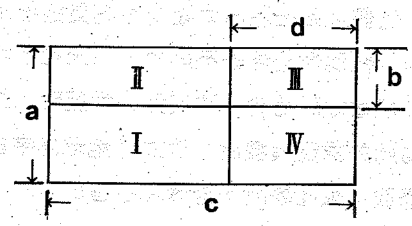
$$\begin{aligned}0=(-1)\times 0&=(-1)\times(-1+1)\\&=(-1)\times(-1)+(-1)\times 1\\&=(-1)\times(-1)+(-1)\end{aligned}$$

將−1移項得$(-1)\times(-1)=1$

(b)藉助於幾何圖形及分配律可證明

$$(-b)\times(-d)=b\times d$$

其中b，d表正量。以$a>b$，$c>d$為長、寬的矩形，如下圖：



做成四個矩形Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ，我們計算Ⅰ的面積為

$$\begin{aligned}\mathrm{I}&=(a-b)(c-d)\\&=ac+(-b)c+a(-d)+(-b)(-d)\\&=ac-bc-ad+(-b)(-d)\\&=ac-(\mathrm{II}+\mathrm{III})-(\mathrm{III}+\mathrm{IV})+(-b)(-d)\\&=\mathrm{I}-\mathrm{III}+(-b)(-d)\end{aligned}$$

故$\mathrm{III}=(-b)(-d)$，但$\mathrm{III}=bd$，

所以$(-b)(-d)=bd$

(3)**恐嚇法（歸謬法）**

以消去法則：

若$a\times b=a\times c$，且$a\neq 0$，則$b=c$

也能證明$(-1)\times(-1)=1$

Euler 對於 負×負為正的 符號法則說明如下：

$(-1)\times(-1)$不是+1就是−1，但是$(-1)\times(+1)=-1$。

故$(-1)\times(-1)$不會是−1，那麼它必定是+1，即$(-1)\times(-1)=1$。

Courant 說此證法可用搖曳不定的理論說明。事實上若$(-1)\times(-1)=-1$，則得$(-1)\times(-1)=(-1)\times(+1)$兩邊消去−1便得$1=-1$，這是不合理的，因此$(-1)\times(-1)=1$

這是實現家的有趣想法，用的是一種恐嚇的手段達到其證明的目的。

以上的說明是在【負×正=負】的既知規則下進行，同時也在某些數學的運算法則為預備的概念，方得成功。可供遇到此問題的教師參考，或引起學生的學習動機。