專欄 省立教育學院 科學教育系 數學組

如何利用特殊化原理來引導學生思考問題

林來居

所謂特殊化是從對一組已知對象的考慮縮小到包含於其中較小一組對象或僅僅一個對象的考慮。當一個學生對一個問題百思不解時，這時老師可用很多方法引導學生去想這問題。而建議學生去解一個相同未知數或相似未知數但比原問題容易解之問題時，常可收到意想不到的效果。一般說來，在解一個難題之前，先解一個簡單而和原題有關的問題，對解題應很有幫助。這簡單而比較容易解的問題常是原問題的特例，我們常因解這些特例而引起我們解題的靈感。有時候我們祇要從這些特例問題再加一點觀察與思考，我們很快就可解決原問題。有時解這些特例是解原問題的重要步驟，這些特例就好比上樓時之小階梯，雖然有時候每一個特例對我們解題幫助甚小，但好幾個特例合起來常常就可把一個問題解決。除此以外我們亦常用特殊化原理找出一個不服從某種敍述的對象，因而就可說明某種敍述之不眞。這種用來駁倒某敍述之對象，我們常稱之爲反例。現在就舉一些實例來說明上述的特殊化原理。

【例A】（Lagrange 插入公式）

求一函數 $f(x)$ 使 $f(a_1)=b_1$，$f(a_2)=b_2$，…… $f(a_n)=b_n$？

在解決這問題以前，我們先看這問題之幾個特例。

當 $b_2=b_3=\cdots=b_n=0$ 時例A變成如下問題

【特例A_1】求一函數 $g_1(x)$ 使 $g_1(a_1)=b_1$，$g_1(a_2)=g_1(a_3)=\cdots=g_1(a_n)=0$？

很顯然令 $g_1(x)=\lambda(x-a_2)\cdots(x-a_n)$，則 $g_1(a_2)=g_1(a_3)=\cdots=g_1(a_n)=0$。

爲滿足 $g_1(a_1)=b_1$，因此

$$\lambda=\frac{b_1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)}$$

所以 $g_1(x)$

$$=\frac{b_1(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)}$$

當 $b_1=b_3=b_4=\cdots=b_n=0$ 時，例A變成

【特例A_2】求一函數 $g_2(x)$ 使 $g_2(a_1)=g_2(a_3)=g_2(a_4)=\cdots g_2(a_n)=0$，$g_2(a_2)=b_2$？

仿照〔特例A_1〕，我們得 $g_2(x)=$

$$\frac{b_2(x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)}$$

如此做下去，我們可得 $g_i(x)=$

$$\frac{b_i(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)(a_i-a_3)\cdots}$$

$$\frac{\cdots(x-a_n)}{(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}$$

滿足 $g_i(a_i)=b_i$，$g_i(a_1)=g_i(a_2)=g_i(a_{i-1})=g_i(a_{i+1})=\cdots=g_i(a_n)=0$

因此我們得到例A之n個特例之解 $g_1(x),\cdots g_n(x)$，而上面n個解又和我們原問題有何關係呢？我們不妨注意一下這n個解之性質：

$$\begin{array}{lll}
g_1(a_1)=b_1 & g_2(a_1)=0\cdots & g_n(a_1)=0\\
g_1(a_2)=0 & g_2(a_2)=b_2\cdots & g_n(a_2)=0\\
g_1(a_3)=0 & g_2(a_3)=0\cdots & g_n(a_3)=0\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
g_1(a_n)=0 & g_2(a_n)=0\cdots & g_n(a_n)=b_n
\end{array}$$

我們如仔細觀察上面式子第一列我們發現

$g_1(a_1)+g_2(a_1)+\cdots+g_n(a_1)=b_1$

$g_1(a_2)+g_2(a_2)+\cdots+g_n(a_2)=b_2$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$g_1(a_n)+g_2(a_n)+\cdots+g_n(a_n)=b_n$

因此我們如令 $f(x)=g_1(x)+g_2(x)+\cdots+g_n(x)$

則 $f(a_1)=b_1$，$f(a_2)=b_2$，$\cdots$ $f(a_n)=b_n$，因此 $f(x)$ 爲〔例A〕所求之函數。

【例B】（孫子神奇妙算）

設N個正整數 m_1，m_2，$\cdots m_n$ 兩兩互質，今有某正數被 m_1 除之餘 b_1，被 m_2 除之餘 b_2，被 m_n 除之餘 b_n，問此正數最小多少？

在解這問題之前，我們先看這問題之特例。當 $b_2=b_3=\cdots=b_n=0$，〔例B〕變成這樣特例即

【特例 B_1】求一能被 m_2，m_3，$\cdots m_n$ 整除，被 m_1 除之餘 b_1 之數在〔特例 B_1〕中如 $b_1=1$，則〔特例 B_1〕變成如下問題即

【特例 B_{1S}】求一能被 m_2，m_3，$\cdots m_n$ 整除，被 m_1 除之餘1之數？這時若 x_1 爲〔特例 B_{1S}〕之解，則 x_1 必爲 m_2，m_3，$\cdots m_n$ 之公倍數，因此在 m_2，m_3，$\cdots m_n$ 公倍數中找一個被 m_1 除之餘1之數，令其爲 x_1，因 $x_1=m_1q_1+1$，所以如令 $Y_1=b_1X_1$，則 Y_1 爲〔特例 B_1〕之解。

當 $b_1=b_3=\cdots=b_n=0$ 時，則〔例B〕變成這樣的特例

【特例 B_2】求一能被 m_1，m_3，$\cdots m_n$ 整除，被 m_2 除之餘 b_2 之數？仿照〔特例 B_1〕我們可以求出〔特例 B_2〕之解 Y_2。

我們如設 Y_i 爲一能被 m_1，$\cdots m_{i-1}$，m_{i+1}，$\cdots m_n$ 整除，被 m_i 除餘 b_i，則仿照〔特例 B_1〕之方法，我們可將 Y_i 求出。此時若注意這N個特例之解，我們不難發現 $Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$ 被 m_1 除之餘 b_1，m_2 除之餘 b_2，m_n 除之餘 b_n，此時若以 $m_1m_2\cdots m_n$ 除 $Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$ 得

$Y_1+Y_2+\cdots+Y_n=qm_1m_2\cdots m_n+r$，則顯然 r 爲〔例B〕之解。

【例C】某正數被3除之餘 a，被11除之餘 b，被5除之餘 c，被7除之餘 d，求某數最小多少？

解此問題前先解此問題之四個特例，在〔例C〕中當 $a=c=d=0$ 時特例C變成這樣的問題：

【特例 C_1】求一數能被3、5、7整除，被11除之餘 b？

如當 $b=1$ 時〔特例 C_1〕又變成這樣的問題

【特例 C_{1S}】求一數被3、5、7整除，被11除餘1？

若 X_1 爲〔特例 C_{1S}〕之解，則 X_1 必爲 $3\times5\times7$ 之倍數，很顯然 $X_1=210$ 爲所求，而 $Y_1=bX_1=210b$ 爲特例C之解

設 Y_2 能被3、11、7整除，被5除餘 c，則照特例 C_1 之方法得 $Y_2=231c$。

設 Y_3 能被3、11、5整除，被7除餘 d 之數，Y_4 爲能被11、5、7整除，被3除餘 a 之數，則照〔特例 C_1〕之方法，得 $Y_3=330d$，$Y_4=385a$。這時如觀察 Y_1，Y_2，Y_3，Y_4 我們不難發現 $X=Y_1+Y_2+Y_3+Y_4$ 爲一被3除餘 a，11除餘 b，被5除餘 c，被7除餘 d 之數，如將 $Y_1+Y_2+Y_3+Y_4$ 用 $3\times5\times7\times11$ 去除，我們得到

$Y_1+Y_2+Y_3+Y_4=q\times3\times5\times7\times11+r$，則 r 爲所求之數。

爲了解例A、例B、例C我們可以先解這些問題之特例，而這些特例有時又有特例。這情形就好比一個人在過河時，他可在河中比較深的地方先放一些大石頭，在大石頭與大石頭間比較淺的地方放一些比較小塊石頭，他祇要踏這些石塊

（下接 73 頁）

步驟：

1. 任取蓬萊稻、在來稻連根帶穗之植株各3株，分別以天秤稱其全株總重，求其平均重量記錄之。

2. 點數每株水稻之有效分蘗數，求平均記錄之。

3. 每株任選3穗，點數其每穗總粒數，求其平均而記錄。

4. 蓬萊稻、在來稻分別逐株以手指脫粒，然後數取 1000 粒以天秤稱其 1000 粒重。

5. 以木製剝殼器（或利用指甲）剝皮成糙米，或由碾米廠、米店購取與本實驗材料同一品種之現成白米代替之，數取 1000 粒以天秤稱得 1000 粒重。

6. 蓬萊米、在來米各取1碗白米，稱以天秤記錄之。

7. 以量筒確認電鍋內每1刻度所表示的容量。

8. 蓬萊米、在來米各取5碗白米，分別以2具電鍋同時煮成飯，求其每碗白米之平均飯碗數。

9. 煮飯期間，到附近農田裏以量尺實測水稻之行距、株距（或由老師事先調查插秧機及人工插秧的行距、株距，以便實驗中提供同學們參考）。

習題：

1. 原來只有1粒的水稻種子，經播種、發芽後，行光合作用而生長、開花、結果，至成熟收穫時可變多少重的有機體（水稻1株總重量）？

提示：一般農家或機械插秧多採3、4本植，經實驗結果單本植與4本植都得相同的產量。

2. 在水稻全株總重中吾人所吃的白米重量佔幾%？

3. 一碗的蓬萊米、在來米經以電鍋煮熟後，各得幾碗飯？

4. 由以上的結果，計算你1年需要吃幾公斤的白米？又需要幾公頃的水田面積來生產你的需要？

5. 一公頃地1年可生產幾公斤的稻穀及白米？可供給多少人的糧食？

6. 據報民國68年7月台灣地區人口總數為 17,313,000 人，估計至民國89年（公元 2000 年）時，將達到2,700萬人（若積極推行家庭計劃，亦將達2,300萬人）。設仍維持目前的生產技術與生活方式，試問到時台灣地區需要幾萬公頃的水田面積？需要生產幾萬公噸的白米？可不可能達到這個目標？

提示：台灣地區目前的水田面積為78萬公頃；稻穀年產量240萬公噸。但由於都市之繼續發展與工商之不斷興起，所以水田面積有被奪用而減少之慮。

討論：

現有一戶三代同堂的農家，擁有0.8公頃的水田，由老大負責耕種，他家中有年老父母、老二（私立大學在學中）、妹妹2人（都在某工廠當女工，月收 14,000 元）。老大已婚生有2歲的長女及剛滿月的雙胞胎女孩，他的朋友勸他不要再生孩子了。你贊成嗎？為什麼？

（上接 66 頁）

，他就可順利過河。這些特例就好比這些大、小石頭，它們可幫助我們解問題。由上面幾個例子我們很容易發現用特殊化原理去引導學生思路，學生比較容易接受。

用特殊化原理去思考問題可以說是很好的方法，希望讀者能體會並靈活運用，相信在教學上必將有所助益。

參考資料：

1. 坡里雅著，張憶壽譯：如何解題
2. 李恭晴著：整數論
3. Froberg 著：Introduction to Numerical Analysis.