

數學實驗教學法簡介

審稿人：郭熒昌

數學實驗教學法是美國數學教育學家們最近力倡的輔助傳統教學法的一種有效的教學活動。要把這個觀念介紹給中、小學數學教師，也許應該先介紹實驗教學法的理論基礎、實施方法，以及其功能並對實施的成效提出報告。現因篇幅所限及截稿時間匆促只能作一個簡介。

目前我國中學數學教學最主要的缺點是在沒有顧到學生的個別差異及學生的需要與興趣。當然升學考試是原因之一，在這種暫難消除的非教育性的外在因素影響之下是否就沒有途徑來求改進？

首先我們都瞭解教師的職責是教學不是教書，是教學生如何“學”而不是只教給學生“書”中的內容。然而這幾乎是傳統的概念：教師是教

書的人；教師所寫文字中也常看到“我在××中學教書”等字句。“不要只做經師而且要做人師”，這句名言是鼓勵教師除了教“書”以外還要注意到學生的品德修養，也沒有意味著要注重教“學”。現在要介紹的數學實驗教學法就特別着重在這方面，幾何模型也是實驗的一部份，實驗教學法最重要的是一種精神並不要求要有怎麼樣的設備或有怎樣佈置的教室。主要的在由學生自己去做、去發現、去討論，教師是站在旁觀的指導地位而不直接參預。在教師精心的設計下去引導學生發現新觀念（對學生而言是新的觀念），獲得解決問題的方法，這當然是比較困難的而且在開始時進度會緩慢，但學生經過若干次表現後其思考能力會快速增加。

3 的乘冪的運用：天平問題

李珠玢

在中視「挑戰」節目中有這麼一個題目：「利用天平要稱 1 至 40 克的整數克數，最少需要幾個砝碼，這些砝碼各重多少？」現在我們將題目中的 1 至 40 克改為 1 至 n 克討論一下。

當然 1 克的砝碼是不可缺少的，下一個當然是 2 克的砝碼了，3 克可用 1 克與 2 克的來稱，因此下一個是 4 克的砝碼，5 克、6 克及 7 克可用前三個砝碼來稱，所以第四個砝碼為 8 克，而這些砝碼的重量分別為 2^0 克、 2^1 克、 2^2 克、 2^3 克，利用數學歸納法很容易可以得到，若有 k 個

砝碼分別重 1 克、2 克、 2^2 克、 $\dots$ 、 2^{k-1} 克，則可以稱出 1 至 $(2^k - 1)$ 克的整數克數，而第 $(k + 1)$ 個砝碼重 2^k 克。因此當 $2^{k-1} \leq n < 2^k$ 時，我們需要 k 個砝碼，各重 1 克、2 克、 2^2 克、 $\dots$ 、 2^{k-1} 克。當 $n = 40$ 、 $2^5 \leq 40 < 2^6$ ，故需要 6 個砝碼，分別重 1 克、2 克、4 克、8 克、16 克、32 克。

上面的方法是大家比較容易想到的方法，完全利用加法的做法，在稱東西時，將物品放在天平的一端，而砝碼放在天平的另一端，這也是天

平的普通用法。但如果我們用上減法時，情形會如何呢？在天秤的一端放物品及 x 克的砝碼，另一端放 y 克的砝碼，若天秤保持平衡，很容易便知道物品重 $(y - x)$ 克，因此當我們第二個砝碼重 3 克時，2 克的物品可在同一端放 1 克的砝碼而另一端放 3 克的砝碼稱出來，當 $n = 4$ 時，我們只須 2 個砝碼而不是 3 個砝碼，因此上面的方法並不滿足「最少」的條件，這不是我們所要的答案。那麼答案是什麼呢？

我們假設要稱 1 至 n 克的整數克數時須 ℓ 個砝碼，分別重 w_1 克、 w_2 克、 $\dots$ 、 w_ℓ 克，我們並且假設 $w_1 < w_2 < \dots < w_\ell$ ，當然我們可以取 $w_1 = 1$ ，然後再取最大可能的 w_2 ，使得 2 克可以利用 w_1 與 w_2 稱出，即

$$2 = w_2 - w_1 = w_2 - 1$$

所以可以取 $w_2 = 3$ 。4 克也可以稱出來了，接著要稱 5 克時，必須有第三個砝碼，現在取最大可能的 w_3 ，則

$$5 = w_3 - w_1 - w_2 = w_3 - 1 - 3$$

所以可以取 $w_3 = 9$ ，而且利用 9 分別減去 3、2、1，可以得到 6 克、7 克及 8 克的重量。現在我們可以看出一個法則，則下一個砝碼的重量的最大可能為前面幾個砝碼重量和的兩倍再加 1，然後利用減法可以得到這個砝碼的重量數與前幾個砝碼重量和之間的各個整數克數。我們利用數學歸納法可以得到 k 個砝碼分別重 1 克、3 克、 3^2 克、 $\dots$ 、 3^{k-1} 克所能稱的重量為 1 至 $1 + 3$

$$+ 3^2 + \dots + 3^{k-1} = \frac{1}{2} (3^k - 1) \text{ 克的整數克數}$$

，而下一個砝碼的最大可能重量是 $w_{k+1} = 2 \left[\frac{1}{2} (3^k - 1) \right] + 1 = 3^k$ 克。因此我們所要的砝

碼的重量分別為 1 克、3 克、 3^2 克、 $\dots$ 等等，且當 $w_1 = 1$ ， $w_2 = 3$ ， $\dots$ ， $w_\ell = 3^{\ell-1}$ 時，我們能夠

稱 1 至 $\frac{1}{2} (3^\ell - 1)$ 克的整數克數。因此當 $\frac{1}{2}$

$(3^{\ell-1} - 1) < n \leq \frac{1}{2} (3^\ell - 1)$ 時，共須 ℓ 個

砝碼，其重量可以取 1 克、3 克、 $\dots$ 、 $3^{\ell-1}$ 克。

但除了 $n = \frac{1}{2} (3^\ell - 1)$ 外，取法並不唯一，例

如當 $n = 7$ 時，除了 1 克、3 克、9 克的取法外，還有 1 克、3 克、4 克；1 克、2 克、6 克；1 克、1 克、5 克； $\dots$ 等等的取法。

最後我們求得原題目的答案如下： $40 = \frac{1}{2}$

$(3^4 - 1)$ ，所以只須 4 個砝碼，其重量分別為 1 克、3 克、9 克與 27 克，而且答案是唯一的。



(上接 71 頁)

32 重量測定

32-1 燃燒鋼絨

32-2 當量 (鎂和 H^+)

32-3 分子量 (Victor Meyer 測定法)

32-4 分子量 (凝固點下降測定法)

專題Ⅷ：酸、鹼、離標值 (pH) 指示劑

33. pH 指示劑

33-1 酚酞

33-2 溴甲酚綠

33-3 混合指示劑

33-4 萬能指示劑 (Universal indicators)

33-5 用花做 pH 指示劑

34. 酸鹼滴定

34-1 氫氧化鈉的標定

34-2 你的醋合乎規定嗎？

34-3 弱酸和弱鹼的滴定——選擇指示劑
(待續)

II. 參考書

Armchair Chemistry

A Programmed Laboratory Manual

Second Edition

Second Printing

1976

by Hubert N. Alyea