

青少年世界中的數學(六)

Paul Rosenbloom 著

黃敏晃 譯

六、數學：一門科學、一種語言、 一類藝術

由數學完成出來的產品，像一門科學一樣，是組織完密的學問。大部分的人需要知道其中一部分有關數與空間的知識，以便在現代的社會中生存。數學也是一種語言，有其專用的名詞術語以及句法結構。歐美農夫手冊中的方程式，報章雜誌上的統計圖表，多少顯示了數學文盲（*Mathematics illiterates*）在現代社會中將遭遇到越來越大的困難——缺乏數學的訓練，使他們得不到想要的資料。

然而，做數學卻是一種藝術工作，要把不同的概念，在邏輯的聯絡下組出一幅完美的系統結構。同別種藝術一樣，數學的工作涉及到，在一片亂糟糟的事物中抽出和諧的規律，以最精簡的方法達到目的，把粗看之下毫無關連的概念間發現一種出人意料之外的關係。在數學作品裡，美的感受與透視，與欣賞音樂、繪畫或其他藝術作品時並無二致。

在數學文獻中，我們可以找到一些小品（例如，在第二節中談到的玻璃珠滾下光滑斜坡的描述），這些小品就與舒伯特（*Schubert*）的小夜曲一樣可以雅俗共享，甚至於有許多非數學家的普通人，也有能力在不是十分費事的努力下，把它重新創造出來。當然，在數學的文獻中也包含了一些大塊頭的名作品，如布拉姆斯（*Brahms*）的交響樂一樣，需要經過認真的努力研究，才能真正的欣賞出美的韻味。

目前中小學裡介紹給學生的數學教材中，最接近名作品的是中學裡教的歐幾里得幾何（譯者

註：我國中學裡所教的傳統平面幾何教材，是其中的一部分，目前這部分的教材也慢慢有保留不下來的趨勢。歐美各國情形與我國類似，但有些國家的部分地區保留的比較完整，甚至立體幾何部分都還保留）。儘管近代的數學教科書編者與中學數學教師，把它分割得支離破碎，令人驚奇的是還有一大批學生，能從其中得到數學系統的結構之美的強烈感受。

同其他藝術一樣，普通人也能從別人創造出來的數學作品中，得到欣賞者的激情滿足，而一小部分的人也能積極的參與小型名作的重新創造工作，或甚至相當程度的創造工作。有能力欣賞數學作品的人數，也許要比一般人想像中的多的多，但我們無法證明這點。理由是有太多的人，由於社會的偏見（如女人不該學好數學等），教育制度的不良（如不注重數學的學制），以及個人遭遇的不幸（如未能受教育，或年青時的數學教師專叫學生死記等），受到了所謂「文化上的剝削」而失去了培養欣賞數學作品能力的機會。

要使學生養成數學的欣賞能力，一定要使他們早期就有接觸到數學的美的一面的機會（除了一般使學生感到沉悶的計算外）。事實上，越年青的人好奇與好玩的天性越濃厚，越能接受藝術方面的訓練，而不致像大人那樣世故，事事要講究有何用處。你見過一個小孩問「畫一張美麗的黃昏落日的圖片有何用處」嗎？或「唱一支動人的歌曲有何用處」嗎？

這裡還有一個很重要的論點，是一般大人對於學校裡教給學生的教材有一種偏見，即他們認為這些教材是固定的知識與技術，完全沒有創新

的可能。他們以為創新的前線研究，是高級專家們互相秘傳的事物，一般人或學生都不可能接觸到，也沒有能力瞭解。這種偏見隱含着一個非常嚴重的危機：「知識是全人類所共有的」概念是民主精神中相當重要的一環。如果高深知識只為少數人所有，他們就容易形成一種特權階級，因而產生違反民主的不公平現象。

其實，前線研究的新結果，所以只在專家圈內流傳，是件頗為無可奈何的事情，即這件事是無意間形成的，而不是有意造成的。因為這些新結果的詮釋，是以許多有關連的高深知識的瞭解作為前提的，而這些高深知識的瞭解又需費時甚長的鑽研與努力。一般人固然沒有辦法像專家那樣把大量的時間資本投下去（這是專家的職業），即使能投入大量的時間，也沒能像專家那樣執着地下鑽研的功夫（缺乏基本的方法訓練，這種執着也甚難持續）。

二十年來，這種危機已經慢慢地為世人所重視，學術界的人士也逐漸的覺悟到，長此以往地把自己關到學術的象牙塔中，會導致學術的慢性死亡。於是，把科學界的新結果普遍化，使學生及一般大眾都能瞭解的工作，也發展成爲一種新興的行業。這種行業目前在知識的傳播方面，扮演了頗為重要的角色。但知識傳播業的欣榮，並不等於就是教育的成功。

學生需要學習的教材，有一部分自然是學術界的完成品——知識，更重要的教材是學生應該學到能發掘自己的問題，發出合適的問話，找出有關聯的資料知識，定出如何解決問題的策略，並在解決問題得到結果後，能把結果作適當的解釋，以便應用到別的問題上去。簡言之，他不應該只學到已有的知識，而應配合自己的問題學到這些知識所以形成的過程。

只有在這種「幼兒式的研究（baby research）」經驗中，學生才能活學活用世間已有的知識，而且在將來沒有人或現存的知識能替他解決問題的情況下，自己動手研究出新的知識，以解決問

題。所以，教師的職責不在於知識的傳播，而在於指導學生獲得上述的寶貴經驗。為此，他自己也要有研究的經驗。

大部分富有應用性的問題，需要廣泛的現實經驗作為基礎，因而對於年數尚青涉世未深的在校學生總覺得隔了一層，這是許多編寫數學教科書的人沒能認清的弱點。當然，從數學教科書編者或教師的立場來看，把富應用性的問題列入教材內容，未嘗不是對加強學生對現實世界認識這種副學習的一種努力。但對學生而言，對透過一些他所不瞭解的資料，去學習新的數學內容，就未免難上加難，因此對數學失去興趣及自信。

從我以往的經驗看來，最適合於學生作為幼兒式研究的題材，莫過於經過精選的遊戲。由於兒童對遊戲的喜愛，他們一定會自動地去完成研究，老師只要在旁加以適切的指導就可以了。下面舉「拈」的遊戲（譯者註：請參看科學月刊民國六十四年七月號，趣味數學之六：一個名為「拈」的遊戲——李宗元、黃敏晃）為例子來說明。在此遊戲中，兩個對手之間有幾堆棋子，兩人輪流從不同的堆中取一個以上的棋子（全堆一次拿光也可以），取得最後一個棋子的人輸。假定輪到你取棋子時，你面前有三堆，而各堆棋子數目如下：



你可以由左邊兩堆中的任一堆取一子（等於把此堆取光），也可以由最右邊那堆中取一到五子。在一些實驗後你會發現，必勝的取法是由最右那堆中取四子，使每堆剩下一個。如此，不管對手由那堆中取（記得他至少得取一棋子，而且只能從一堆中取），變成只有兩堆，每堆一個，這時你拿一個，對手只得拿最後一個而宣告失敗。由此看來，我們已經找到了一種必勝型態，即不管對手怎樣拿你都有辦法取勝的型態：

1 1 1

兒童先要自己發現這個必勝型態的概念，並找出許多的必勝型態，來說明這不是孤立的現象，即必勝型態這個概念是由許許多多例子的共同性質中抽出來的。一段時間的實習後，他們可找出下列各種簡單的必勝型態（讓我們假定堆數是3，堆數超過3時也是可以的，見上面的引文）：

2	2	0		2	3	1
0	2	2		3	2	1
2	0	2		3	1	2
3	3	0		2	1	3
3	0	3		1	3	2
0	3	3		1	2	3

不久他們就會發現一些性質，例如各堆的順序其實並不關緊要，所以上面的12種必勝型態實際上只是下列的3種（連同1, 1, 1共4種）

2	2	0
3	3	0
1	2	3

因此，我們可以固定第一堆的數目，讓第二堆的數目變化，然後決定第三堆的數目應為多少才會是必勝型態。例如，第一堆數目為0時情形如下（注意到，這等於只有兩堆的情形）：

第一堆	第二堆	第三堆
0	1	0
0	2	2
0	3	3
0	4	?
0	5	?

在這個過程中，他會學到如何把大數目的情形簡化成小數目的情形，例如由[0, 3, 3]的情形可變成[0, 2, 2]的情形，再進一步變成[0, 1, 0]的情形如下：

$$[0, 3, 3] \xrightarrow[\text{3個}]{\text{他拿}} [0, 0, 3] \xrightarrow[\text{2個}]{\text{我拿}} [0, 0, 1]$$

$$\begin{array}{l}
 [0, 3, 3] \xrightarrow[\text{2個}]{\text{他拿}} [0, 1, 3] \xrightarrow[\text{3個}]{\text{我拿}} [0, 1, 0] \\
 [0, 3, 3] \xrightarrow[\text{1個}]{\text{他拿}} [0, 2, 3] \xrightarrow[\text{1個}]{\text{我拿}} [0, 2, 2] \\
 [0, 2, 2] \xrightarrow[\text{2個}]{\text{他拿}} [0, 0, 2] \xrightarrow[\text{1個}]{\text{我拿}} [0, 0, 1] \\
 [0, 2, 2] \xrightarrow[\text{1個}]{\text{他拿}} [0, 1, 2] \xrightarrow[\text{2個}]{\text{我拿}} [0, 1, 0]
 \end{array}$$

經過一段嘗試，錯誤修正的步驟後，他們會發現拿成[0, 4, 4]與[0, 5, 5]是必勝型態，並會仿照上述方式把這二種必勝型態，簡化成已知的必勝型態。解決了上述問題後，他可以直接跳到下而大數目的情形，解決起來也不費力

0 11 ?

這裡順便提一下，上述的過程隱含着一個很重要的研究技巧，即把一般性的問題特殊化，先解決簡單的情形（上面我們先假定只有3堆，又令第一堆數目為0，即等於只有2堆），培養對問題的直覺，並找出些規律性。這種技巧對解決問題時，通常幫助很大（譯者註：請參看數學傳播第九期張憶壽的文章，數學裡解題法中的特殊化與一般化原理，以及第十一期黃敏晃的文章，數學裡的極端化原則）。

經過上述步驟後，他們可以開始下一步，即三堆數目都不為0，而第一堆數目為1的情形：

第一堆	第二堆	第三堆
1	1	1
1	2	3
1	3	?
1	4	?
1	5	?

然後再進一步研究三堆數目都不為0，而第一堆數目為2的情形（注意到，由於三堆的順序與結果無關，所以可以假定第一堆的棋子數，小於或等於第二堆的棋子數，第二堆的棋子數又小於或等於第三堆的棋子數）：

第一堆	第二堆	第三堆
2	2	?
2	3	?
2	4	?
2	5	?

這樣得到的一大堆的資料，可以放在下列的大表中（只要填對角線之上，為什麼？），以資查看

第二堆的棋子數

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	2	3	4	5			
1		1	3	2					
2			0	1					
3				0					
4					0				
5						0			
6							0		
7								0	
8									0

在上面的表格中，橫列對應第一堆的棋子數，直行則對應於第二堆的棋子數。譬如說，若第一堆的棋子數為2，第二堆的棋子數為3，第三堆的棋子數應為多少才是必勝型態？則可查第三列第四行，所以第三堆的棋子數應為1。

填滿上表之後，他們就可以看出許多規律，這些規律又可幫助他們研究進一步的結果（如四堆棋子數目都不為0的情形，或更一般的結果）。

這些結果當然不是新的，這種幼兒式的研究的目的也不是要教學生如何於特定的遊戲中取勝。譬如說，把勝負的規定變成「取最後第四個棋子的人勝」，上述的結果就沒用了。

重要的事情是，透過這些活動這些過程，學生學到如何解決問題的原理原則，學到如何學習。尤其是在義務教育中，我們希望學生不是被強迫來上學，而是高高興興的來學習。

如果學生學到了這些，不管他幾年後需要什麼新的知識，他都有辦法學到，甚至於把新知識創造出來！

我認為這就是數學教育的要義，也是人類所有教育的終極目標。〔全文完〕

〔譯者現職：國立臺灣大學數學系教授〕

（上接41頁，行為目標與數學教學～一個仔細完整的解釋～）

示出預期完成的學習結果。

測驗編製完成後，加以實施及批改，批改後教師仍可統計錯誤的比率，並就此比率衡量教學的結果決定是否重教，藉以補救教學的缺失，實施教學時直接利用行為目標，講解試題指示其中的一種方式而已。為清楚起見我們擬出一流程圖藉供參考。

七、結 論

以行為目標協助數學教學除了具有教學的導向性外，最重要的是講究以學生活動為中心，講究

具體實效。對教師而言使用行為目標教學可以節省教學時間，有效計劃作業編製測驗及補救教學，為一實際之工具，雖然有人批評其未必有效，但檢討其原因實非其本身理論之過錯，應為推廣時執行之偏差，筆者僅就個人所知對其加以註釋，尚請不吝指教。

〈註一〉：教育部：國民中學課程標準

正中書局 61,10 頁94

〔作者現為國立臺灣師範大學數學研究所學生〕