

振動理論的數學模型

蘇賢錫



本文的目的在於討論振動理論教學中的數學模型之用法。雖然如此，在討論「模型」與「類似性」時，專門名詞往往容易變成含糊。因此，首先必須澄清「模型」與「類似性」這種名詞的含義。「原始模型」是尚未定義妥善的基本觀念——例如，大部分非科學家所想像的那些中學初期所討論的，具有電子繞軌道運行的原子，或運動中的氣體分子。當原子模型經過詳細敘述而與理論連用時，就產生「實用模型」。舊模型的修改，包括所選擇環境中的性質或行為方式的規定。選來作為修改對象的原始模型，其各面將視原始模型的相關理論或假設而定。實用模型可視為一個物理系統或物體狀態的代表。而這些系統與狀態的客觀性暫時不受懷疑。科學家可以從實用模型導出能夠予以試驗的預卜，並且可以設計適當的實驗性試驗。假如實驗結果不能證實預卜的事項，則原始模型可以拋棄。至於實用模型所牽涉的數學，其範圍可能相當不同。在不太嚴密的情形之下，敘述性導電帶理論，可以視為一種實用模型，以預卜金屬電導係數隨溫度的升高而降低。（早期的科學家認為，假定存在於能帶模型中的電子本身，就是其他實用模型的主題與物質。）

「數學模型」是一種實用模型，或一群複雜的實用模型，而這種模型可以用數學方程式來代表，也可以用數學方程式來做有效的整理。因為相同形式的數學公式可以用來代表完全不同的實用模型，所以在這公式中可能有些符號不只代表一種變數。例如，

$$dQ/dt = -kA dQ/dx$$

上列方程式中，Q 可能代表電量，也可能代表熱量，全視 Q 是代表電位抑或代表溫度而定。在這種情況之下，互相配對的二量，例如電量與熱量，稱為「符號的類似」。

「符號的」這個形容詞是用來強調這種類似性只是人造的，或是巧合性質的。這種類似性是完全因數學家優先處理某種形式的方程式而產生。物理上許多地方都使用形式相同的方程式，然而這項事實並不表示我們可以認為真正物理世界均為類似。上列所學的流動方程式中，熱流與電流公式之間的相似形式是歐姆選擇流體作為電的原始模型，同時他利用傅里葉的數學方法去開發熱流理論，因而產生的不可避免之後果。在十九世紀，開耳芬已經證明，流體、熱、電、以及磁現象的流動定律，均可以用相同形式的方程式來代表。但是，正如赫塞（Hesse）在「力與場」一書中指出，這項知識並沒有產生任何物理假設。

任何數學模型中，每一個方程式中的每一個符號都必須具有不含糊的定義概念。每一個方程式必須具備一份完全的目錄表，說明方程式可以應用的條件。雖然在教科書中或數學中很少強調，但是這第二項要求是非常重要的。因為這項要求能夠幫助減少該數學模型的誤用與不正當延伸的次數。

利用數學公式的方法來記述一個系統的特性，這將是實際系統的理想化。這時必須忽略某些因素，而這些因素可以決定理想化的程度。這種理想方法的程度是否可以認為令人滿意？這是有關科學觀點的事，必須由實驗來證實某些因素確實是次要的。

安得羅諾夫在「振子理論」一書中記述：問題的分析所許可的理想化，其性質必須視該問題的整體性而定。因此，其性質不但由該系統的性質來決定，而且也由我們希望答覆的問題來決定。

因為不同的理想化率涉到不同的數學模型，所以符號的類似將具有某些程度的相似，而這種相似乃視「理論」而定。然而，類似性不能太多

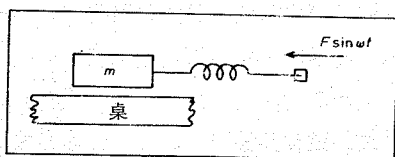
，因為任何兩個類似量的幾個客觀性質，一定不能共存。因此，在教科書與教學上，往往必須花費很多時間，去指出物理學上不同部門之間的「類似性」。

除非我們在教學中充分討論符號的方法以及數學模型的方程式之適用條件，否則我們不但不能幫助學生理解，反而會使他們感到困惑。學生必須先理解實用模型與數學模型，然後始可使用扼要的方程式。否則，他們很可能變成擅長寫下公式，却無法分析他們所寫的公式之意義：他們雖然會解答一些考試題目，但是不會研判一些有問題的答案。

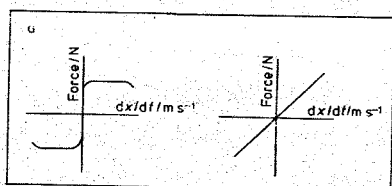
例如，首先，就下列方程式予以討論。它常常用以代表一個質量為 m 的物體在變力 $F \sin \omega t$ 的作用之下，作一種特別強迫振動。

$$m d^2 x / dt^2 + R_m dx/dt + x / C_m = F \sin \omega t \quad (1)$$

式中， x 代表向量位移， t 代表時間， R_m 代表單位速度的力學阻力，而 C_m 代表單位力的位移（即「力學柔量（mechanical compliance）」）。尚未解方程式來求出 x 之前，值得先來仔細研究式中的幾項。 $R_m dx/dt$ 這項是代表阻止運動的力，而這力與 m 的速度 dx/dt 成正比。在振動系統中，如何得到這種適當的變力？的確，我們不能在圖一所示的系統內獲得。因為力隨速度的變化如同圖二(a)所示，而不是我們所需的圖二(b)之形狀。



圖一 簡單的振動系統



圖二 力隨速度的實際(a)與所需(b)變化

假使質量為 m 的物體在流體中運動，而這運動所受的阻力主要是來自黏滯力（雷諾耳數小）

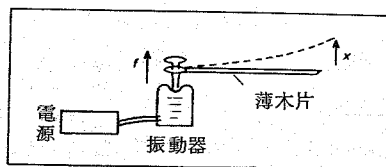
，並且在流體內設有產生湍流，則可得到接近於圖二(b)形狀的關係。同時，式(1)假設 x 的振幅始終很小，因而 C_m 保持常數；與 m 相較，彈簧的質量小得可以忽略不計，與彈簧的彈性相較，物體的彈性也小得可以忽略不計。由交流電動勢驅動的LCR串連電路所適用的下列方程式，其條件可以比照上述假設。

$$L d^2 Q / dt^2 + R dQ/dt + Q / C = E \sin \omega t \quad (2)$$

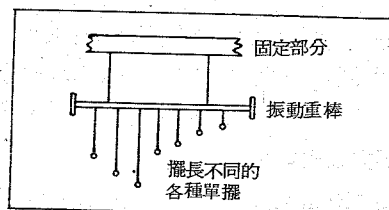
一般人都不得不承認式(1)與式(2)極為相似。然而，此處應該強調的並不是力學上的柔量類似於電學上的電容，而是假使沒有如上的簡化假設，我們必須應用至少四階的微分方程式。

符號的類似中，除非其實體的獨立性質已被認識，不然，在其他領域中，假使力學上的位移 x 當作類似於流體密度的部分變化 S （冷凝）而使用；同時在同一本聲學教科書的其次數頁上， x 又當作類似於氣體的「體積流動」來使用，那麼，連智力較高的學生也會皺眉。有人告知筆者，他曾經見過成績特優的學生浪費很多時間，想用實際物質的觀念去理解電學與聲學線路理論的符號類似。任何學生尚未達到能夠辨別這種類似的階段之前，他在學習令人困擾的「共振」問題時，必定相當頭痛。

在討論力學系統中的共振與 Q 因數時，往往利用圖三與圖四所示的裝置作為示範之用。其中



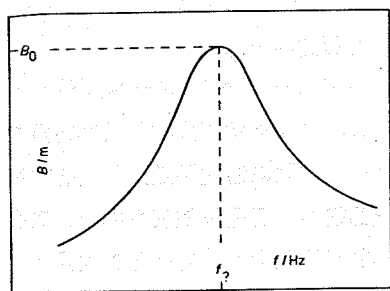
圖三 簡單的振動示範



圖四 巴頓擺

，圖三所示的簡單器材對於顯示 x 的振幅 B 隨薄木片末端振動頻率 f 改變的情形，極為有效。 B

隨 f 變化的圖形，猶如圖五所示。巴頓 (Barton) 擺的示範也能提供重要資料：亦即，驅動系統與最大振幅的擺，其振動確實並不同相。眼光銳利的學生不難發覺，共振擺的相與驅動棒的相，相差 90° 。



圖五 振幅隨頻率的變化

下列簡單分析，可以求得 x 、 B ，以及驅動系統與被驅系統的位移之間的相角。（大多數的書籍都喜歡利用簡潔的複數方法來解二階微分方程式。但在大學低年級的階段，似乎宜用初等三角學的方法來解這種方程式。因此，本文特別採用三角法。）

設式(1)的解為

$$x = B \sin(\omega t + \varphi)$$

這解僅在 B 及 φ 值與式(1)中的各項保持特定關係始能成立。為求這些關係，必須將解代入式(1)。

因 $x = B \sin(\omega t + \varphi)$

故 $dx/dt = \omega B \cos(\omega t + \varphi)$

而 $d^2x/dt^2 = -\omega^2 B \sin(\omega t + \varphi)$

將上列二式代入式(1)，得

$$-m\omega^2 B \sin(\omega t + \varphi) + R_m \omega B \cos(\omega t + \varphi) + (B/C_m) \sin(\omega t + \varphi) = F \sin \omega t$$

其次，唯一的「技巧」就是將上式右邊的 $\sin \omega t$ 寫成 $\sin(\omega t + \varphi - \varphi)$ 。則 $F \sin \omega t$ 變為

$$F \sin[(\omega t + \varphi) - \varphi] = F[\sin(\omega t + \varphi) \cos \varphi - \sin \varphi \cos(\omega t + \varphi)]$$

而整個方程式變成

$$\begin{aligned} -m\omega^2 B \sin(\omega t + \varphi) + R_m \omega B \cos(\omega t + \varphi) \\ + (B/C_m) \sin(\omega t + \varphi) = F \sin(\omega t + \varphi) \cos \varphi - F \sin \varphi \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

令上式兩邊 $\sin(\omega t + \varphi)$ 與 $\cos(\omega t + \varphi)$ 的係

數相等，即得

$$-m\omega^2 B + (B/C_m) = F \cos \varphi \quad (3)$$

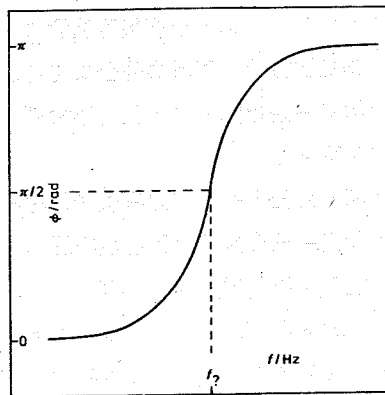
$$R_m \omega B = -F \sin \varphi \quad (4)$$

將式(4)除以式(3)得，

$$\tan \varphi = \frac{-R_m \omega B}{(B/C_m) - m\omega^2 B} = \frac{-\omega R_m}{(1/C_m) - m\omega^2}$$

這式顯示相角 φ 隨頻率 $f(= \omega/2\pi)$ 改變的情形。

圖六就是 φ 與 f 的關係圖表。



圖六 相角與頻率的關係

為了消去 φ 以便獲得 B 與 ω 之間的關係，必須將式(3)與(4)的平方相加。其結果為

$$(R_m \omega B)^2 + [(B/C_m) - m\omega^2 B]^2 = F^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = F^2$$

$$\therefore B = F / [\omega^2 R_m^2 + \{ (1/C_m) - m\omega^2 \}^2]^{1/2}$$

當適當的頻率使上式的分母變成最小值時，即可得到 B 的最大值 B_0 （亦即 x 的最大值）。

圖五與圖六中的 f_2 就是這個 f 值。學生必定非常容易找出 f_2 值，且由觀察可知，上式的中括號內等於零時， B_0 並不是最大值。

上面所討論的，只是共振的一種，在這種力學系統，這種共振可以稱為「位移共振」或「振幅共振」。由式(1)與式(2)在數學形式上的相等，得知 LCR 電路上電容器的電量 Q 可以下式表示

$$Q = Q_p \sin(\omega t + \varphi)$$

式中 Q_p 為最大電量； Q 的振幅變化情形，完全與 x 相同。如此，頻率 f_2 係 Q_p 為最大值時的頻率，並且令 Q_0 為 Q_p 的最大值。在 f_2 時的這種共振，可以稱為「電量共振」。

薄木片末端的速度 dx/dt （見圖三），可由下式獲得。

$$x = B \sin (wt + \varphi)$$

即 $dx/dt = wB \cos (wt + \varphi)$

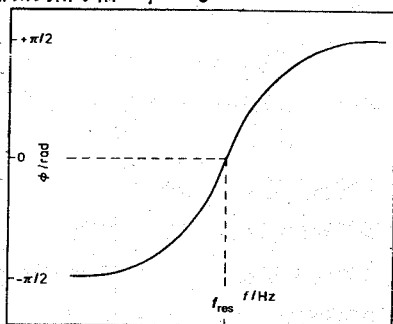
因此， dx/dt 的振幅等於 wB ，前面已經證明，

$$B = F / [w^2 R_m^2 + \{(1/C_m) - mw^2\}^2]^{1/2}$$

故 $wB = F / [R_m^2 + \{(1/C_m w^2) - m\}^2]^{1/2}$

由觀察知，這次 wB 的最大值，確實發生在上式的中括號內等於零時。這種「速度共振」將發生在 f_{res} 時，而 f_{res} 與 f_2 並不相等。

電學上的這種特別的共振，發生在由 $(1/\omega^2 L) - L = 0$ 所求出的頻率時。圖七表示驅動系統（力學上是力，電學上是電壓）與第一次導數感應（力學上是速度，電學上是電流）之間的相位關係。在「速度共振」時，驅動系統與被驅系統，其振動係同相： $\varphi = 0$ 。



圖七 驅動系統與第一次導數感應的相位關係

物理學家沒有特別指明而說「共振」時，通常是指力學系統的「速度共振」與電路系統的「電流共振」。學生沒有特別指明而說「共振」時

，通常是指力學系統的「位移共振」與電路系統的「電流共振」。學生容易指出 L 、 C 、與 R 分別類似於 m 、 C_m 與 R_m ，但是他們不會指出 X 類似於 Q （而不是類似 I ）。學生總是記得自己所見的。在力學振動示範中，他們所見的是位移與振幅。他們不可能見到速度，根本談不上位移的微量變化中之速度變化。因此，難怪他們把共振與位移記在一起。另一方面，電學上的共振示範幾乎全都顯示電流以及電流隨頻率的變化情形。因此，他們把共振與電流記在一起。

現在用不著筆者再三強調，大學低年級階段振動理論教學法的改革必要。高年級學生不至於混淆不清，這時，類似性在設計問題，尤其是科技應用方面的有用性，即可予以討論。對於低年級學生而言，「類似性」可能令人誤解它的真意。

參考資料

Andronov A.A., Vitt A.A., and Khaikin S.E.
1966 Theory of Oscillators (trans Immirzi F) (Oxford: Pergamon Press)
Bunge M 1973 Method, Model and Matter (Dordrecht: Reidel)

Hesse M 1961 Forces and Fields (London: Nelson) p. 209

〔作者現職：國立臺灣師範大學物理系教授〕

（上接 9 頁，科學教育的教學價值）

生追求答案的動機。

3. 課程內容是否具活力、單純、明快、具體？

4. 結構變化，常保生動氣氛，引人入勝。

5. 切忌繁雜絮亂，應具統調顯出主題內涵。

6. 教材以實驗為主，並能啟發學生思想，以研究自然環境，或生活有關的科學問題。

7. 能培養學生以簡御繁，由已知推未知之能力。

五、結語

在這個知識爆炸的時代，如何推展科學教

育，追求最高的科學教育功效，實為每一位教師最關切的一個課題。我們僅用「科學過程」和「科學成果」這兩個有用的詞彙來說明科學的雙重性。假如科學是一種不斷改變的企業是正確的話，那麼所從事的科學計畫是不是就不應該把科學全然當作目前的既定現況，而是應該也把科學看成一種未來永遠未知而時常改變的領域。其中科學教育的教學價值則居於研習科學的最終點，為學生研習科學決定是否學習的樞紐；換句話說，在有限的學習領域，面對著競爭，促進科學教育的發展，完美的教學為其成功的關鍵。

〔作者現職：台中縣立龍井國中教師〕