萬年曆*

薛昭雄 呂德根

一、現行民用曆的歷史背景

現行民用曆起源於羅馬時代；而它是以〃儒略曆〃(Julian Calendar)爲基礎，演變而成的。

儒略曆爲一種記時方法，爲西元前46年羅馬帝國儒略凱撒(Julius Caesar)以埃及通行的365.25日爲一年的平均年長，定每年爲365日，隔三年有一次366日(閏年)，于西元前46年頒佈實行。使民用曆和太陽的運行近于一致。四季一致的回歸年(tropical year)比儒略曆的年略短，即回歸年爲365.2422日，故至西元十六世紀中葉，儒略曆比太陽眞運行落後十日以上。因此在西元1582年10月，當時教宗格勒哥里十三世(Pope Gregory XIII)下令改曆，訂該年10月4日星期四的翌日星期五爲10月15日(即將超出的10日棄去)，使春分之日還至復活節舊表所定之日(即3月21日)。經如此修正後，歷經相當時期毋須再加修正，並規定置閏如舊，惟各世紀年(百數之年)除了能爲400所除盡者外，均不置閏，例如西元1700，1800，1900年均非閏年，而西元1600，2000，2400年仍爲閏年。如此行之，現行曆每3323年約差1日。爲了修正這種誤差，有人建議：西元4000年及所有它的倍數之年數均不予置閏！(註)

二、有關"週日"的問題

所謂〃週日〃(week-day)即我們平常所稱的星期一、星期二、…等。因365、366均非7的倍數，一個特定的日期在連續兩年不可能有相同的週日，例如：今年的某月某日是星期六，那麼明年的同一日期絕不可能再是星期六。因此便產生了〃如何決定一個特定的日期是星期幾〃的問題。在西元1882年，塞勒(Zeller)給了我們這個問題的答案，現將他的方法誌之於下：

設

$$f(J,n,m,q)=5J+\left[\frac{J}{4}\right]+n+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{26(m+1)}{10}\right]+q-1, \qquad (1)$$

其中$[x]$表x的整數部分。那麼我們可循下列步驟求得西元($100J+n$)年m月q日(其中$0\leq n\leq 99$)是星期幾。

(一)由公式(1)求得$f(J,n,m,q)$之值。

(二)以7除$f(J,n,m,q)$，若整除則得西元($100J+n$)年m月q日爲星期日;若餘數爲1，則該日爲星期一；餘數爲2，則該日爲星期二，依此類推。

(三)若被指定之日期在元月或二月份，則需當作前一年之13或14月，始可由公式(1)求得$f(J,n,m,q)$之值，以下列問題說明之。

〔問題一〕西元1977年元月21日爲星期幾？

解　由題意得知，公式(1)中$J=19$，$n=76$，$m=13$，$q=21$；因此

$$f(J,n,m,q)=5\times 19+\left[\frac{19}{4}\right]+76+\left[\frac{76}{4}\right]+\left[\frac{26\times 14}{10}\right]+21-1=95+4+76+19+36+21-1=250,$$

以7除250得餘數5，因此所求爲星期五。

應用〃同餘〃(congruence)的基本理論，我們可求解下列型態的問題。

〔問題二〕在本世紀，何年之二月份有五個星期日？

解　設所求之年爲西元($1900+N$)年，其中$1\leq N\leq 99$，則該年必爲閏年且其2月1日爲星期日，故N必爲4之倍數，故得

$$N\equiv 0 \pmod 4 \qquad (2)$$

*本文資料採自：〃The Perpetual Calendar〃 by H.P. Rogosinski. University College, Swansea.

由公式(1)，取 $J=19$，$n=N-1$，$m=14$，$q=1$ 得

$$5+(N-1)+\left[\frac{1}{4}(N-1)\right]\equiv 0 \pmod 7 \qquad (3)$$

N為4之倍數，故 $\left[\frac{1}{4}(N-1)\right]=\frac{1}{4}N-1$，故(3)式可簡化成 $5(\frac{1}{4}N)+3\equiv 0 \pmod 7$

兩邊各乘以12，得

$$N\equiv 6 \pmod 7 \qquad (4)$$

由(2)，(4)兩式可得解

$$N\equiv 20 \pmod{28} \qquad (5)$$

由(5)式知，所求之年為西元1920年，1948年和1976年。

三、復活節日期的決定

西元325年，在尼西亞（Nicaea）召開的一次宗教會議中頒佈："復活節訂於春分（3月21日）或春分後第一個滿月後的第一個星期日"。著名的德國數學家高斯（Gauss）設計了一個簡單的數字法則，用來決定一特定年其復活節日期。現將適用於本世紀的法則誌之於下：

決定西元（1900+N）年復活節日期之步驟如下：

(一)以19，4和7除N，各得餘數a，b和c。

(二)以30除 $19a+24$，得餘數d。

(三)以7除 $2b+4(c-1)+6d$，得餘數e。

則復活節在三月（$22+d+e$）日（若 $d+e\le 9$），或4月（$d+e-9$）日（若 $d+e>9$）。本法則另有兩個例外：若 $d=29$ 且 $e=6$，則復活節在4月19日（而非4月26日）；若 $d=28$ 且 $e=6$，則復活節在4月18日（而非4月25日）。讀者可自行證明由此所得之復活節日期必為星期日，且在3月22日與4月25日之間。

〔問題三〕決定西元1973年復活節日期。

解　由題意知，公式中之 $N=73$，由步驟(一)得 $a=16$，$b=1$ 和 $c=3$，因此 $19a+24=328$。由步驟(二)得 $d=28$ 故 $2b+4(c-1)+6d=178$。由步驟(三)得 $e=3$ 故 $d+e=31$。由此得知西元1973年復活節在4月22日。

〔問題四〕本世紀何年之復活節在4月25日？

解　復活節在4月25日唯一的情形為 $d=29$ 且 $e=5$。因 $d=29$，由步驟(二)知 $19a\equiv 5 \pmod{30}$，兩邊各乘以19得 $a\equiv 5 \pmod{30}$，因 $0\le a<19$，故得 $a=5$。由步驟(一)得

$$N\equiv 5 \pmod{19} \qquad (6)$$

因 $e=5$，由步驟(三)可得 $2b+4(c-1)+6\times 29\equiv 5 \pmod 7$ 化簡得 $4b+c\equiv 6 \pmod 7$ 且由步驟(一)知 $c\equiv N \pmod 7$ 因此得

$$4b+N\equiv 6 \pmod 7 \qquad (7)$$

由(6)式得知N可能之值為5，24，43，62或81，將此等值代入(7)式，因 $0\le b\le 3$，可得唯一解為 $N=43$，$b=3$ 因此本世紀僅西元1943年其復活節在4月25日。

若讀者有興趣去求解"本世紀何年之復活節在3月22日？"這個問題，他將會發現這個問題的答案是令人驚奇的！

（註）　本段資料另參考：商務書局出版之"中山自然科學大辭典"第三册，246至247頁。

〔本文作者：薛昭雄現任國立政治大學應用數學系教授，呂德根現任私立輔仁大學數學系講師〕

（上接45頁，青少年世界中的數學（五））

高中時期引入。

這裏順便提到，在使用機率計算期望值時，有兩件事情一定得交待清楚：其一，機率為90%時，事件不一定發生，這是數學威力的限制——能讓學生了解數學不是萬靈丹是件重要的事。其次，期望值牽涉到所謂的「價值判斷」（Value judgement）的問題。例如，當上述遊戲的報酬，不是金錢而是香蕉或桔子時（如兩人都選黑則甲得一條香蕉，兩人都選白則甲得一個桔子，甲黑乙白則乙得一條香蕉與一個桔子，甲就有喜愛香蕉或桔子的偏好的價值判斷問題。這種價值觀每人不同，是要自己決定的，有了決定後（如甲喜愛桔子，可定出一個桔子等於二條香蕉）才能計算期望值（未完待續，下期結束）。