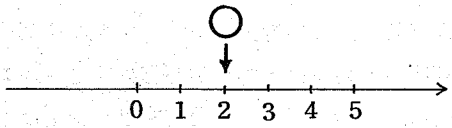
青少年世界中的數學(五)

Paul Rosenbloom 著　　　黃敏晃 譯

五、理性的決策

這裏讓我們先提另一類型的數學模型：若甲乙兩人投擲一枚公正的銅板(fair coin)賭錢，正面出現時甲輸一元給乙，反面出現時乙輸一元給甲〔註1〕。假定甲有二元，乙有三元，問甲賭二元都輸光的機會是多少？

這種問題可以實驗方式進行研究，譬如說，甲在決定與乙眞的賭博之前，先作個模擬實習(Simulation)，以便解決這個問題：他在一條數線上標出0、1、2、3、4與5，並在標著2的位置上擺放一枚銅板，表示他現在有二元，然



後開始投擲一枚公正的銅板。正面出現時，他把數線上的銅板由2移到1，表示他輸了一元給乙後只剩一元了；反面出現時，就把銅板由2移到3，表示他贏了一元後有三元了。當數線上的銅板移到0或5時，分別表示甲輸光或乙輸光的情形，此時算一局。一局結束後，再從頭作第二局的實習。假定他作了10局，100局與1000局的記錄如下表：

實習的局數	輸光的局數		輸光的百分比	
	甲	乙	甲	乙
10	5	5	50%	50%
100	62	38	62%	38%
1000	609	391	60.9%	39.1%

由此不難發現，當模擬實習的局數很大時，甲輸光的百分比約爲60%。這個模擬實習可幫助他決定，他該不該眞的賭錢？但這個實習只能幫他作有關這種賭錢方面的決定，而且只是當他有二元而他的對手有三元的時候，至於其他情形以及其他的賭錢方式，這個實習就無甚助益。所以他應該考慮使用另外的方式進行討論。

設w、x、y與z是當他有一元、二元、三元與四元，而對手依次有四元、三元、二元與一元時，他輸光的百分比數，而且假定這些百分比數是實習很多局後的結果，如同上述的60%一樣〔註2〕。如果他有一元，銅板第一次就出現了正面，他就已經輸光了。對公正的銅板而言，正面與反面出現的機會各半。所以另一半的機會他贏一元而變成了有二元，此時他輸光的百分比就與他原有二元的時候一樣，即爲x，這件事的發生只有一半的機會。由此他可以得到下列的方程式：

〔註1〕　譯者註：在外國的數學課本中討論機率教材時，常出現賭博的例子，因爲是最容易入手的例子。但國內的數學課本，爲了怕被人指責鼓勵學生賭博，常避嫌不用。這不見得是最好的編書態度，我國並不因此就比外國減少了賭博的禍害(最近報紙上報導了賭風甚熾的消息就是明證)，學生因缺少了最易入手的例子，反而學不好機率教材。其實，正確的態度應該是在數學課本中出現賭博的例子，藉機說明其害處。

〔註2〕　譯者註：說得嚴格些，這些百分比數的存在，實際上牽涉到數列的極限是否存在的問題。但中小學的學生同十七世紀時期的數學家費馬(Fermat)與巴斯卡(Pascal)一樣，不致於對這些存在性的問題發生懷疑的。

$$w=(\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2})x \text{ ——— (1)}$$

同理，他可以仿照上述的論點推得下列各式：

$$x=(\tfrac{1}{2})w+(\tfrac{1}{2})y \text{ ——— (2)}$$

$$y=(\tfrac{1}{2})x+(\tfrac{1}{2})z \text{ ——— (3)}$$

$$z=(\tfrac{1}{2})y+(\tfrac{1}{2})0 \text{ ——— (4)}$$

這四個式子合起來，就把這場賭博的情形描述得清清楚楚了。爲了明確地把各百分比寫出來，他得會解上式的四元一次聯立方程式。由最後一個式子開始往回推：

由(4)式可得 $z=(\frac{1}{2})y$ ———(5)

(5)式代入(3)式得 $y=(\frac{2}{3})x$ ———(6)

(6)式代入(2)式得 $x=(\frac{3}{4})w$ ———(7)

(7)式代入(1)式得 $w=\frac{4}{5}$ ———(8)

(8)式代入(7)式得 $x=\frac{3}{5}$ ———(9)

(9)式代入(6)式得 $y=\frac{2}{5}$ ———(10)

(10)式代入(5)式得 $z=\frac{1}{5}$

到此爲止，他學到了不用每次實驗，就可以推測出輸贏的機會的方法。此後，他可以計算賭輪盤的情形，他身上有多少錢？賭場的資金多少？每次輪盤旋轉到那個號碼的機會如何？你如何預測專壓某個號碼的賭客的輸贏？在他走進賭場前，這些知識說不定就使他却步不前了。

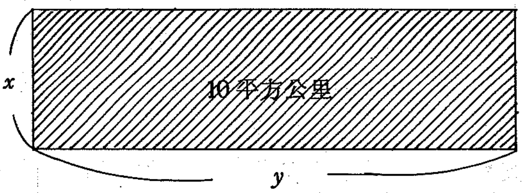
讀者不難看到，這類數學模型與前面提到的大大不同。譬如說，在玻璃珠滾下光滑斜坡的模型中，我們能作相當準確的預測，但在上述的模型中，我們不再能預測特定一次的結果。雖然如此，我們還是可能預測很多局的結果的百分比。事實上，若上述的甲生在 1000 局中輸光超過 700次，或少於 500 次，則我們對投擲的銅板的是否公正，就應加以懷疑。這種懷疑是每個進入賭場的賭客必備的利器，不然被賭場郎中當肥羊也只好自己負責。

我們提出賭錢的例子，並不因爲十六、十七世紀的許多數學家都靠賭爲生，因此認爲賭錢是數學遺產的一部分而非提不可。主要的原因是賭錢是機率教材的最簡易例子，實驗單純，而由賭錢導出來的機率學是今日，也是將來社會不可或缺的一種必要工具。

許多自然現象與社會現象，都與機率有關。學生在早期覺觸到機率的教材，可以幫忙他在面對不可確定的情況下，作出比較合理的決策。他會學到如何作模擬實習，蒐集必要的數據，觀察出可能的趨向，作出一些基本的假設，然後由此得到推論而選擇明智的決策。

在此，由觀察的描述與資料的分析，到數學模型的建立與推論得到預測，是最爲關鍵之處。到目前爲止，數學教育界中還沒有人有足夠的經驗，敢斷言怎樣的準備與經驗，可以幫忙學生渡過這一關。一些富於想像創造力的教師，作過的一些實驗結果顯示，學生渡過這一關的時期，剛好是在兒童由具體操作期進入形式操作期的過渡時期。由於機率現象是自然科學與社會科學中最基礎的事物，每個人多少都需擁有統計的觀點。因此，如何使學生順利地渡過這一關，就變成數學教育界最急迫的要務。

能夠作出明智的決策，即在所有可能的情況中作出最佳選擇的能力，恐怕是每個學生該學習的事物中，列在前矛的首項學習項目之一。除了上述有關機率的情形外，還有許多與此有關的數學教材。譬如，要用籬笆圍出一塊 10 平方公里的矩形農場，該如何圍才最省錢？假定每一公里長的籬笆造價4500 元，那最低成本會是多少？



如果其寬爲 2 公里，則長應該爲 10／2＝5 公里，此時籬笆長爲 2（2＋5）＝ 14 公里，造價爲63000元；如果 $x=3$，則 $y=10/3$，造價爲 57000 元；如果 $x=4$，則 $y=10/4$，造價爲 58500 元。那個造價最低，還可不可能更低？

其實，這個問題算是蠻單純的：所有可能的情況，只不過就是 x 能取得不同的值；結果要求使 10 公里長的籬笆造價最低，在每公里籬笆造

價爲4500元的假定下，我們有個簡單公式如下：

$$\boxed{\begin{array}{c}10\text{公里長}\\ \text{籬笆造價}\end{array}} = 9000\left(x + \frac{10}{x}\right)$$

這個式子給出了一個數學模型，使我們能預測任何選擇的結果，而且我們可以由簡單的結果比較中，作出最佳的決策。

我們要教給學生的大部分東西，都可以特別選定的遊戲方式進行，而且這種方式經常最具效果。教學生如何作出最佳決策，自然也不例外，在此下棋或牌局遊戲最爲適當。下棋或牌局常製造出一些需要作選擇作決定的狀況，這模擬了學生將來需要面對的生活現實。在生活現實中學習決策，常意味著冒失去生命或財產的大險，在下棋或牌局中學只不過輸去一盤棋或一局牌。在此，學生還能在作出錯誤的決定後殘存，在錯誤中學習，下次就能作出更好的決策。這是棋與牌的教育價值。

棋與牌的種類很多，但讀者都很熟悉，或至少可以查到，這裏就不再贅言。下面給出另一種既不是棋也不是牌的簡單遊戲：假定甲乙兩人以黑白圍棋子爲戲，各別暗自在拳頭中置一枚圍棋子後，同時把拳頭打開，若同爲黑則甲輸一元給乙，若同爲白則乙輸一元給甲，若爲異色則無輸贏。此遊戲可以下列甲（或乙）的輸贏矩陣（pay-off matrix）說明：

甲＼乙	黑	白
黑	−1	0
白	0	1

甲的輸贏矩陣

甲＼乙	黑	白
黑	1	0
白	0	−1

乙的輸贏矩陣

不難看到，這兩個矩陣其實是同一回事，讓我們以甲的輸贏矩陣來說明。甲與乙同樣有黑白兩種顏色可選擇：甲若選黑，則甲該看黑的那列，乙選黑時甲輸一元，乙選白時沒輸贏；甲若選白，則看白的那列，乙選黑時沒輸贏，乙選白時甲贏一元（譯者註：按國內所用術語，橫的叫列，縱的叫行）。乙參看自己的輸贏矩陣時，可採用相同的方式。

年紀較小的學生，可以在這個遊戲中發現，他如果採取正確的決策（甲選白，乙選黑）時，他絕對不會輸（這裏牽涉到最簡單的推論）。對年紀稍大的學生，這個遊戲就太簡單了，我們可以把此遊戲變得稍微複雜些，如下列甲、乙兩人的輸贏矩陣所示〔註3〕：

甲＼乙	黑	白
黑	1	−1
白	0	2

甲的輸贏矩陣

甲＼乙	黑	白
黑	−1	1
白	0	−2

乙的輸贏矩陣

由此看來，這遊戲似乎對甲有利，因爲甲若一直選白，則不會輸，但乙也可一直選黑而不輸錢。但甲在料定乙會採用此策略時，可採取選黑而贏一元的策略。若乙知道甲採用此策略，他又可反過來選白以贏一元。甲若知道乙的企圖時，又可藉機選白來懲罰乙（贏他二元）。如此反反覆覆，每個人的最佳策略都是相對的，而不是絕對的，即依賴對方的選擇。因此，在作決策時就得猜對方的心意。在戰爭中這種情況經常發生，但在一般的情況下，對手常不是一個人，而是一群人（商業行爲）或大自然（自然現象）時，就有規律可循。此時可藉機率算出期望值，以決定最佳策略。但這裏所謂的規律的尋求，有時又費時又費錢，所以只能在極有限的資料中去尋求規律。但如此又冒著一些危險，即尋求出來的規律不見得適用於大的群體。所以，如何在有限的時間與經費的限制下，就小量資料找出最好的規律？這就牽涉到統計中取樣方法的問題了。這種材料在

〔註3〕　譯者註：這個形式還是比我國流行的「剪刀、石頭、布」的猜拳遊戲單純些，因爲只有黑白兩種選擇。但因此在學習決策時，就較易抓住要點。又每次都有輸贏，這種安排也較好。

（下接47頁）

由公式(1)，取 $J=19$，$n=N-1$，$m=14$，$q=1$ 得

$$5+(N-1)+\left[\frac{1}{4}(N-1)\right]\equiv 0 \pmod 7 \quad (3)$$

N 爲 4 之倍數，故 $\left[\frac{1}{4}(N-1)\right]=\frac{1}{4}N-1$，

故(3)式可簡化成 $5(\frac{1}{4}N)+3\equiv 0 \pmod 7$

兩邊各乘以 12，得

$$N\equiv 6 \pmod 7 \quad (4)$$

由(2)，(4)兩式可得解

$$N\equiv 20 \pmod{28} \quad (5)$$

由(5)式知，所求之年爲西元 1920年，1948 年和 1976 年。

三、復活節日期的決定

西元 325年，在尼西亞（Nicaea）召開的一次宗教會議中頒佈："復活節訂於春分（3月21日）或春分後第一個滿月後的第一個星期日"。著名的德國數學家高斯（Gauss)設計了一個簡單的數字法則，用來決定一特定年其復活節日期。現將適用於本世紀的法則誌之於下：

決定西元（1900+N）年復活節日期之步驟如下：

㈠以19，4 和 7 除N，各得餘數 a，b和 c。

㈡以 30除 $19a+24$，得餘數 d。

㈢以 7 除 $2b+4(c-1)+6d$，得餘數 e。

則復活節在三月（$22+d+e$）日（若 $d+e\leq 9$），或 4 月（$d+e-9$）日（若 $d+e>9$）。本法則另有兩個例外：若 $d=29$ 且 $e=6$，則復活節在 4 月19日（而非 4 月26日）；若 $d=28$ 且 $e=6$，則復活節在 4 月18日（而非 4 月25日）。讀者可自行證明由此所得之復活節日期必爲星期日，且在 3 月22日與 4 月25日之間。

〔問題三〕決定西元1973年復活節日期。

解　由題意知，公式中之 $N=73$，由步驟㈠得 $a=16$，$b=1$ 和 $c=3$，因此 $19a+24=328$。由步驟㈡得 $d=28$ 故 $2b+4(c-1)+6d=178$。由步驟㈢得 $e=3$ 故 $d+e=31$。由此得知西元 1973年復活節在 4 月22日。

〔問題四〕本世紀何年之復活節在 4 月25日？

解　復活節在 4 月25日唯一的情形爲 $d=29$ 且 $e=5$。因 $d=29$，由步驟㈡知 $19a\equiv 5 \pmod{30}$，兩邊各乘以 19 得 $a\equiv 5 \pmod{30}$，因 $0\leq a<19$，故得 $a=5$。由步驟㈠得

$$N\equiv 5 \pmod{19} \quad (6)$$

因 $e=5$，由步驟㈢可得 $2b+4(c-1)+6\times 29\equiv 5 \pmod 7$ 化簡得 $4b+c\equiv 6 \pmod 7$ 且由步驟㈠知 $c\equiv N \pmod 7$ 因此得

$$4b+N\equiv 6 \pmod 7 \quad (7)$$

由(6)式得知N可能之值爲 5，24，43，62或 81，將此等值代入(7)式，因 $0\leq b\leq 3$，可得唯一解爲 $N=43$，$b=3$ 因此本世紀僅西元 1943年其復活節在 4 月 25日。

若讀者有興趣去求解"本世紀何年之復活節在 3 月22日？"這個問題，他將會發現這個問題的答案是令人驚奇的！

（註）　本段資料另參考：商務書局出版之"中山自然科學大辭典"第三册，246 至 247 頁。

〔本文作者：薛昭雄現任國立政治大學應用數學系教授，呂德根現任私立輔仁大學數學系講師〕

（上接45頁，青少年世界中的數學（五））

高中時期引入。

這裏順便提到，在使用機率計算期望值時，有兩件事情一定得交待清楚：其一，機率爲90%時，事件不一定發生，這是數學威力的限制——能讓學生了解數學不是萬靈丹是件重要的事。其次，期望值牽涉到所謂的「價值判斷」（Value judgement）的問題。例如，當上述遊戲的報酬，不是金錢而是香蕉或桔子時（如兩人都選黑則甲得一條香蕉，兩人都選白則甲得一個桔子，甲黑乙白則乙得一條香蕉與一個桔子，甲就有喜愛香蕉或桔子的偏好的價值判斷問題。這種價值觀每人不同，是要自己決定的，有了決定後（如甲喜愛桔子，可定出一個桔子等於二條香蕉）才能計算期望值（未完待續，下期結束）。