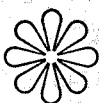


中華民國第十九屆中小學 科學展覽優勝作品選載(上)

變相漲價

本社

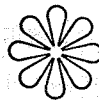


數學科國中組第一名

指導老師：林保平

台北縣立新莊國中

作者：黃嘉銘、陳振雄、林振成



一、動機與目的

60年12月26日有一份報紙刊出了一篇專訪(如附件一)，論及自來水廠隔月抄表計費是否變相漲價的問題，而且舉出了兩個對住戶及水廠各有利弊的例子。計算水費電費在國一時便已學過，我們就想研究看看，到底在何種情況下對住戶有利，是否有公式可以立刻算出隔月抄表計費與按月抄表計費之差額。

二、資料

1. 自來水水費價目(如附件二)

① 因我們只想討論住戶水費故只看水表口徑13公厘，基本水費20元，基本度數8度，水表租金8元者。

② 分段計費單價

第一段 20度以下部分

每度2.50元

第二段 21度至30度部分

每度3.50元

第三段 31度至50度部分

每度4.50元

第四段 51度至200度部分

每度5.50元

第五段 201度至2000度部分

每度4.50元

第六段 2000度以上部分

每度3.50元

③ 隔月抄表計費方式係以每兩月抄得之用戶用水量除以2，成為單月用水量後，再按上列分段計費單價計算單月之水費，所得之單月水費金額之兩倍即為隔月抄表地區用戶水費單之「水費」。

2. 自來水廠舉例說明隔月抄表計費對住戶有利

設某家庭七月用水25°，八月用水15°

① 每月抄表計費

七月25度 $2.50 \times 20 + 3.50 \times 5$
 $= 67.50$ 元

八月15度 $2.50 \times 15 = 37.50$ 元

合計水費105元，另加各月份表租及代征清潔規費。

② 隔月抄表水費

兩月平均20度 $2 \times (2.50 \times 20)$
 $= 100$ 元

故水費100元，另加各月份表租及代征清潔規費。

③ 故採用隔月抄表，住戶省5元

3. 記者舉例說明隔月抄表使住戶吃虧

設某家庭十月用水50度，十一月用水312

度。

① 每月抄表費用

$$\begin{aligned} \text{十月 } 50 \text{ 度} & 2.50 \times 20 + 3.50 \times 10 \\ & + 4.50 \times 20 = 175 \text{ 元} \end{aligned}$$

十一月 312 度

$$\begin{aligned} & 175 + 5.5 \times 150 + 4.5 \times 112 \\ & = 1504 \text{ 元} \end{aligned}$$

合計 1679 元，另加各月份表租及代征

清潔規費

② 隔月抄表費用

兩月平均 181 度

$$\begin{aligned} & 2 \times (2.50 \times 20 + 3.50 \times 10 + 4.50 \\ & \times 20 + 5.5 \times 131) = 1791 \text{ 元} \end{aligned}$$

故水費 1791 元，另加各月份表租及代征

清潔規費

③ 故採用隔月抄表住戶損失 112 元

4. 根據水費之分段，我們推得水費速算法

設用水 x 度「水費」為 $f(x)$ ，為便於計算我

們不計算其表租及清潔費等固定支出。

$$\text{故 } f(x) = \begin{cases} 20 & 0 \leq x \leq 8 \\ 2.5x & 8 < x \leq 20 \\ 3.5x - 20 & 20 < x \leq 30 \\ 4.5x - 50 & 30 < x \leq 50 \\ 5.5x - 100 & 50 < x \leq 200 \\ 4.5x + 100 & 200 < x \leq 2000 \\ 3.5x + 2100 & 2000 < x \end{cases}$$

由此連續兩月用水分別為 x 度及 y 度

則 ① 按月抄表之水費為 $f(x) + f(y)$

② 隔月抄表所計水費為 $2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$

三、研究過程

(一) 為了解其利弊之情形，我們又舉了些例子，用速算法算出來。

① 150 度，150 度→按月

1550 元 隔月 1550 元

② 48 度，40 度→按月

305 元 隔月 305 元

③ 28 度，34 度→按月

181 元 隔月 179 元

④ 24 度，32 度→按月

158 元 隔月 156 元

⑤ 80 度，10 度→按月

365 元 隔月 305 元

⑥ 2000 度，120 度→按月

9660 元 隔月 9740 元

⑦ 1000 度，10 度→按月

4625 元 隔月 4745 元

(二) 由上述許多實例，我們猜測

① 按月或隔月水費之不同與每月用水之度數是否在同一計價範圍有關。

② 兩月份用水量相同或在同一計費範圍時，按月或隔月抄表其水費應相同。

③ 兩月份用水度相差甚大時，按月抄表對住戶有利。

④ 兩月份用水量相接近，但不在同一計價範圍時，隔月抄表對住戶有利。

(三) 我們請教老師指導我們算出資料 4 中的水費速算函數表示法。然後用下法計算利弊。

設兩月用水分別為 x 度， y 度。

① 二月用水量在同一計價範圍時

$$\begin{aligned} \text{若 } 20 < x, y \leq 30, \text{ 則 } 20 < \frac{x+y}{2} \\ & \leq 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) &= 2[3.5\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ &- 20] = 3.5x + 3.5y - 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } f(x) + f(y) &= (3.5x - 20) + (3.5y - 20) \\ &= 3.5x + 3.5y - 40 \end{aligned}$$

$$\text{故 } 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + f(y)$$

即隔月抄表與按月抄表費用相同

同理可算出在其他計價範圍時亦同，我便得到

〔結論一〕 若兩月用水分別為 x 度， y 度，而 x, y 均屬同一計價範圍時，隔月抄表之水費與按月抄表之水費相同。

② 兩月用水量不在同一計價範圍內

例 1 若 $20 < x \leq 30, 8 < y \leq 20$ ，

則 $28 < x + y \leq 50$

$$\text{即 } 14 < \frac{x+y}{2} \leq 25$$

$$\therefore 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} 2.5x + 2.5y & \text{當 } 14 < \frac{x+y}{2} \leq 20 \\ 3.5x + 3.5y - 40 & \text{當 } 20 < \frac{x+y}{2} \leq 25 \end{cases}$$

$$f(x) + f(y) = 3.5x + 2.5y - 20$$

$$\therefore 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq f(x) + f(y) \quad \text{等號只當 } y = 20 \text{ 時成立}$$

即隔月抄表比按月抄表便宜，至少是不貴。

例 2 若 $50 < x \leq 200, 200 < y \leq 2000$

$$\text{則 } 125 < \frac{x+y}{2} \leq 1100$$

$$\therefore 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} 5.5x + 5.5y - 200 & \text{當 } 125 < \frac{x+y}{2} \leq 200 \\ 4.5x + 4.5y + 200 & \text{當 } 200 < \frac{x+y}{2} \leq 2000 \end{cases}$$

$$f(x) + f(y) = 5.5x + 4.5y$$

$$\therefore 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq f(x) + f(y)$$

等號只當 $x = 200$ 時成立

即按月抄表比隔月抄表便宜，至少是不貴。

由這兩例我們發現，我們猜測的①，②是正確的而③，④是有問題的，因所謂相差甚大與甚接近，必須有明確的界定，顯然猜測①“同一計

價範圍”是我們研究中必須注意的，因此我們便列了下表來討論在各種計價範圍時之情形。

	$0 \leq x \leq 8$	$8 < x \leq 20$	$20 < x \leq 30$	$30 < x \leq 50$	$50 < x \leq 200$	$200 < x \leq 2000$	$2000 < x$
$0 \leq y \leq 8$	○		+				
$8 < y \leq 20$		○					
$20 < y \leq 30$	+		○				
$30 < y \leq 50$				○			
$50 < y \leq 200$					○	-	
$200 < y \leq 2000$					-	○	
$2000 < y$							○

說明 1. ○表隔月按月水費相同

2. +表按月抄表水費較高

3. -表按月抄表水費較低

〔四〕 若依上表逐項討論可一一算出，但要做很多次，我們想找一個比較簡單的方法，當 x, y 為任意數時，可很快比較出按月抄表水費與隔月抄表水費的高低，同時能求出它們的差額。

我們再與老師研究，想出了一個與絕對值符號運算很類似，但比較簡單的符號來處理這個問題。這個符號是

$$[A] = \begin{cases} A & \text{當 } A > 0 \\ 0 & \text{當 } A \leq 0 \end{cases}$$

$$[A] = \begin{cases} A & \text{當 } A > 0 \\ -A & \text{當 } A \leq 0 \end{cases}$$

〔註〕我們學過

的絕對值是

$$[x-b] = \begin{cases} x-b & \text{當 } x-b > 0 \\ 0 & \text{當 } x-b \leq 0 \end{cases}$$

時，我們算出

$$f(x) = 20 + 2.5[x-8] + [x-20] + [x-30] + [x-50] - [x-200] - [x-2000]$$

$$\therefore 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 2\left(20 + 2.5\left[\frac{x+y}{2} - 8\right]\right)$$

$$+ \left[\frac{x+y}{2} - 20 \right] + \left[\frac{x+y}{2} - 30 \right]$$

$$+ \left[\frac{x+y}{2} - 50 \right] - \left[\frac{x+y}{2} - 200 \right]$$

$$- \left[\frac{x+y}{2} - 2000 \right]$$

$$\therefore 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$= 40 + 2.5[x+y-16] + [x+y-40]$$

$$+ [x+y-60] + [x+y-100]$$

$$- [x+y-400] - [x+y-4000]$$

令 H 表按月抄表水費減隔月抄表水費

$$\therefore H(x, y) = f(x) + f(y) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$= 2.5([x-8] + [y-8] - [x+y-16])$$

$$+ ([x-20] + [y-20] - [x+y-40])$$

$$+ ([x-30] + [y-30] - [x+y-60])$$

$$+ ([x-50] + [y-50] - [x+y-100])$$

$$+ ([x+y-400] - [x-200] - [y$$

$$- 200]) + ([x+y-4000] - [x-2000]$$

$$- [y-2000])$$

〔結論二〕由 $H(x, y)$ ，對任意 x, y 我們可求得按月與隔月抄表水費之差額，而判定其對住戶或水廠有利。

〔註〕純就水費收支而言)

(五) 我們想確定在何種情形下，隔月抄表對住戶有利，即利用 $H(x, y)$ 來繼續(四)中表之計算。

觀察 $H(x, y)$ 發現 $[x-b] + [y-b]$

$- [x+y-2b]$ 是個關鍵。

$$\text{令 } M(x, y) = [x-b] + [y-b] - [x+y-2b]$$

$$\textcircled{1} \quad x \geq b \text{ 且 } y \geq b \text{ 時, } x+y \geq 2b$$

$$M(x, y) = (x-b) + (y-b) - (x+y-2b) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad x \leq b \text{ 且 } y \leq b \text{ 時, } x+y \leq 2b$$

$$M(x, y) = 0 + 0 - 0 = 0$$

$$\textcircled{3} \quad x < b \text{ 且 } y > b \text{ 時}$$

$$M(x, y) = (y-b) - (x+y-2b)$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} b-x \\ \text{或 } y-b \end{array} \right\} > 0$$

$$\textcircled{4} \quad x > b \text{ 且 } y < b \text{ 時}$$

$$\text{同} \textcircled{3} \text{ 知 } M(x, y) > 0$$

由上面的討論知 $M(x, y) > 0$ 等號只當 $x, y > b$ 或 $x, y < b$ 或 $x = b$ 或 $y = b$ 時成立。

現在我們開始研究 $H(x, y)$ 之值

$$(1) \quad x \leq 200, y \leq 200 \text{ 時}$$

$$\begin{aligned} H(x, y) &= ([x-8] + [y-8] - [x+y-16]) \times 2.5 + ([x-20] + [y-20] \\ &\quad - [x+y-40]) + ([x-30] + [y-30] \\ &\quad - [x+y-60]) + ([x-50] + [y-50] \\ &\quad - [x+y-100]) + 0 + 0 \geq 0 \end{aligned}$$

$$(2) \quad x \geq 50, y \geq 50 \text{ 時}$$

$$\begin{aligned} H(x, y) &= 2.5 \times 0 + 0 + 0 + 0 + ([x+y-400] - [x-200] - [y-200]) \\ &\quad + ([x+y-4000] - [x-2000] \\ &\quad - [y-2000]) \leq 0 \end{aligned}$$

$$(3) \quad x \geq 200, y \leq 50 \text{ 時}$$

$$\triangle \quad x \geq 320, y \leq 50$$

$$\begin{aligned} H(x, y) &= ([y-8] - [y-8]) \times 2.5 \\ &\quad + ([y-20] - [y-20]) + ([y-30] \\ &\quad - [y-30]) + (50-y) + ([x+y-400] - [x-200]) + ([x+y-4000] - [x-2000]) \leq 8 \times 2.5 \\ &\quad + 20 + 30 + 50 + (-120) + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\triangle \quad 200 \leq x \leq 320, y \leq 50$$

$$\begin{aligned} H(x, y) &= ([y-8] - [y-8]) \times 2.5 \\ &\quad + ([y-20] - [y-20]) + ([y-30] \\ &\quad - [y-30]) + (50-y) - x + 200 \\ &= 320 - x - 5.5y + 2.5[y-8] \\ &\quad + [y-20] + [y-30] \end{aligned}$$

$$\therefore H(x, y) = \begin{cases} 320 - x - 5.5y & \text{當 } 0 \leq y \leq 8 \\ 300 - x - 3y & 8 \leq y \leq 20 \\ 280 - x - 2y & 20 \leq y \leq 30 \\ 250 - x - y & 30 \leq y \leq 50 \end{cases}$$

故① $200 \leq x \leq 276$, $0 \leq y \leq 8$ 時

$$H(x, y) \geq 320 - 276 - 44 = 0$$

② $276 \leq x \leq 320$, $8 \leq y \leq 20$ 時

$$H(x, y) \leq 300 - 276 - 24 = 0$$

②' $200 \leq x \leq 240$, $8 \leq y \leq 20$ 時

$$H(x, y) \geq 300 - 240 - 60 = 0$$

③ $240 \leq x \leq 320$, $20 \leq y \leq 30$ 時

$$H(x, y) \leq 280 - 240 - 40 = 0$$

③' $200 \leq x \leq 320$, $20 \leq y \leq 30$ 時

$$H(x, y) \geq 280 - 220 - 60 = 0$$

④ $220 \leq x \leq 320$, $30 \leq y \leq 50$ 時

$$H(x, y) \leq 250 - 220 - 30 = 0$$

(4) $x \leq 50$, $y \geq 200$ 時

由於 x, y 可交換與(3)相似

(六) 我們將前面所討論的繪表如右表一

其中 x, y 表兩月用水量

○表 $H(x, y)$ 之值為零

+表 $H(x, y)$ 之值為正 (包括一部分為 0)

-表 $H(x, y)$ 之值為負 (包括一部分為 0)

△表 $H(x, y)$ 之值要將 x, y 代入方易知其值, 可加細分

四、

同理, 我們可推得水表口徑 20 公厘, 基本度數 20 度, 基本水費 50 元, 水表租金 11 元之 $H(x, y)$ 為

$$\begin{aligned} & 3.5 \times ((x-20) + (y-20) - (x+y-40)) \\ & + ((x-30) + (y-30) - (x+y-60)) \\ & + ((x-50) + (y-50) - (x+y-100)) \\ & + ((x+y-400) - (x-200) - (y-200)) \\ & + ((x+y-4000) - (x-2000) - (y-2000)) \end{aligned}$$

並求出其範圍, 列表於右表二

五、結 論

① 若兩月用水量均在同一計價範圍, 則隔

(表一)

H y	x	$0 \leq x \leq 8$	$8 < x \leq 20$	$20 < x \leq 30$	$30 < x \leq 50$	$50 < x \leq 200$	$200 < x \leq 320$	$320 < x \leq 2000$	$2000 < x$
$0 \leq y \leq 8$		○	+	+	+	+	△	-	-
$8 < y \leq 20$		+	○	+	+	+	△	-	-
$20 < y \leq 30$		+	+	○	+	+	△	-	-
$30 < y \leq 50$		+	+	+	○	+	△	-	-
$50 < y \leq 200$		+	+	+	+	○	-	-	-
$200 < y \leq 320$		+	+	+	△	-	+	○	-
$320 < y \leq 2000$		-	-	-	-	-	○	○	-
$2000 < y$		-	-	-	-	-	-	-	○

[說明] 1. 水表口徑 13 公厘, 基本度 8 度

2. △旁之三縱線為 $x = 276$, $x = 240$, $x = 220$

(表二)

H y	x	$0 \leq x \leq 20$	$20 < x \leq 30$	$30 < x \leq 50$	$50 < x \leq 200$	$200 < x \leq 350$	$350 < x \leq 2000$	$2000 < x$
$0 \leq y \leq 20$		○	+	+	+	△	-	-
$20 < y \leq 30$		+	○	+	+	△	-	-
$30 < y \leq 50$		+	+	○	+	△	-	-
$50 < y \leq 200$		+	+	+	○	-	-	-
$200 < y \leq 350$		+	+	△	-	○	○	-
$350 < y \leq 2000$		-	-	-	-	○	○	-
$2000 < y$		-	-	-	-	-	-	○

[說明] 1. 水表口徑 20 公厘, 基本度 20 度

2. △旁之二縱線為 $x = 240$, $x = 220$

3. 記號意義同「表一」。

月抄表與按月抄表之水費相同。

② 由表一與表二我們可看出在各種用水量

下，隔月抄表與按月抄表對住戶的利弊，特別的兩表中每月用水量在 200 度或 200 度以下之住戶，隔月抄表對他而言不會多支費用，反而可能減少支出。

③ 報紙所刊水廠所舉實例，恰在我們所討論的“+”範圍內，而記者所舉實例，恰在我們的“-”範圍內，故對住戶而言，一為有利，一為有弊。

④ 就理論上來說，水廠，記者均有其依據，但由於一般住戶的用水，很少有一個月超過 200 度的，因此我們應該說。

“隔月抄表計水費 並非變相漲價”

六、推論與建議

我們在老師指導下逐步完成水費的計算及討論。當我們參加台北縣科展時，有位參觀者對我們說“你們可以建議電力公司也採用隔月抄表的方法”。回到學校後，我們便再討論這個問題。

根據電力公司規定

10 安培電表，基本度 20 度

100 度以下部份 每度 1.15 元

101 度到 500 度部份 每度 1.30 元

501 度以上部份 每度 1.50 元

故設兩月用電 x, y 度， $f(x)$ 表電費（不計固定

支出）

$$\text{則 } f(x) = 23 + 1.15[x - 20] + 0.15[x - 100] + 0.20[x - 500]$$

若電力公司隔月抄表計費方法與自來水公司相同則隔月抄表電費

$$\begin{aligned} 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) &= 46 + 1.15[x + y - 40] + 0.15[x + y - 200] + 0.20[x + y - 1000] \end{aligned}$$

令 $H(x, y)$ 表按月抄表與隔月抄表電費之差

$$\begin{aligned} \text{則 } H(x, y) &= f(x) + f(y) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ &= 1.15([x - 20] + [y - 20] - [x + y - 40]) + 0.15([x - 100] + [y - 100] - [x + y - 200]) \\ &\quad + 0.20([x - 500] + [y - 500] - [x + y - 1000]) \end{aligned}$$

故 $H(x, y) \geq 0$ 對任意 x, y 均成立

即 隔月抄表對住戶必為有利，至少不增費用

而採隔月抄表時，電力公司必可與自來水公司一樣在抄表、收費、印發電費單……等方面，減少一半的人力、物力，必可彌補少收的電費。

據報紙刊載，電力公司曾試辦隔月抄表，後因有些人反對而取消，由上述的討論，我們知道隔月抄表計電費較佳，因此，我們建議

“電力公司也採用隔月抄表法計電費”

自製測定重力加速度教具及其研究

物理科國中組第一名

高雄縣立阿蓮國中

指導老師：李 喧、趙元賓

作 者：林武龍、陳新堂

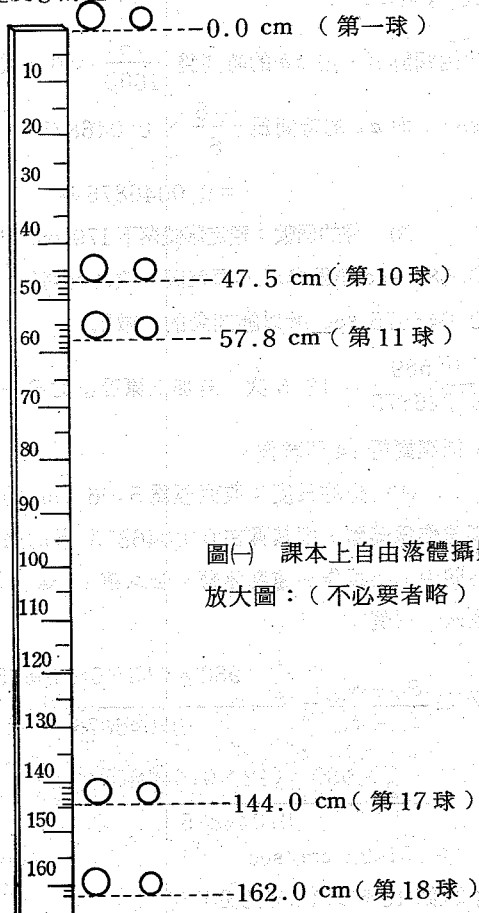
一、動 機：

(一) 在我們所學的國中物理課本中，直接用來

測定重力加速度的儀器與實驗是物理第二冊 P

111 所提示的多次曝光照相機及照片，茲錄原文如下：如圖(一)“質量不相同的兩個球同時開始落下

時的情形這圖是利用每 30 分之一秒閃光一次的照相裝置所拍攝的。利用這張照片試算出重力加速度 g 的值”。



1. 圖(一)簡介，有大小二球同時下落合攝於一張照片中，第一球為靜止位於標尺 0.0 cm，其餘各球的位置如圖(一)所標示。

2. 計算例一：依據 $S = \frac{1}{2}gt^2$ ①此處 $S_{18} = 162.0$ cm 而 t 為 $1/30$ 秒的 17 倍，所以

$$t = 0.567 \text{ sec 代入①式則 } 162 = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore g = 1078 \text{ cm/sec}^2$$

3. 計算例二：依據 $a = \frac{V - V_0}{t - t_0}$ ②

因為 g 還未確定，不能用 $V_t^2 = 2gs$ 來求 V_t ，所以 V 及 V_0 均以平均值為準，則互相抵消之結

$$\begin{aligned} \text{果，仍為正確若 } V &= \frac{S_{18} - S_{17}}{t_{18} - t_{17}} = \frac{162 - 144}{1/30} \\ &= 540 \text{ cm/sec} \end{aligned}$$

$$V_0 = \frac{S_{11} - S_{10}}{t_{11} - t_{10}} = 309 \text{ cm/sec}$$

$$t - t_0 = 7 \times 1/30 = 0.23 \text{ sec}$$

$$\begin{aligned} \therefore a = g &= \frac{540 - 309}{0.23} \\ &= 1004.35 \text{ cm/sec}^2 \end{aligned}$$

4. 由以上二種不同方式的計算例來看，應以例二較正確，但與標準值比較仍相差甚鉅，且 $1004.35 > 980$ 的結果更不能作令人滿意的解釋，因為

① 台灣省是低緯度省份，其重力加速度應小於 980 cm/sec^2 才合理。

② 空氣有阻力及浮力，所以其實際的 g 應小於 980 cm/sec^2 才對。

基於以上理由，我們就請求老師解釋，老師的答覆是一同作“實驗研究”。

(二) 在以往的國中物理課本中有 $T = 2\pi\sqrt{1/g}$ ③一式，我們可以設計一個比較精密的單擺能自動追查 T 來，作為與動機(一)研究結果比較，這樣我們所求得的 g 值不是更正確嗎？

二、用多次攝影方式測定本地的重力加速度

(一) 如何設計照相機

1. 原則：

利用現有的“KODAK EKZ INSTANT CAMERA”(以後簡稱 EKZ) 可以快速顯像，省略了很多沖洗、翻印等的儀器、藥品、時間以及曝光的危險和攝影技術的經驗。

2. 市售 EKZ 內容簡介及改良

① 它已把曝光時間、光圈大小、物距、像距等因素結合一起，以便攝影者的使用。但却因此帶來了①物距應在 1.2 到 2.4 公尺內否則就會影像模糊或光度不足。②曝光時間是依據物體

的光度自動調節的，不像一般照相機可隨心所欲地調整快門時間。③特種的閃光燈，仍不足應付多次曝光全部時間的需要，所以在室內必須另設光源，才能使“遲鈍”的照片感光。

② 根據上述三難題，我們在老師的指導下，作了以下的改良：

(1) 把光圈擴大成原有的三倍（試驗所得的最佳室內光圈）即可在室內四支 40 W 日光燈的照射下，攝得滿意的照片，且物距亦可增加到 L 公尺內。

(2) 把快門與相機內的自動電子控制裝置脫離，使得快門在第一次按下時打開，經過任何長的時間，只要不停地按住快門是一直打開的，但只要放鬆快門（即關閉快門）後，對同一張照片來說，第二次按快門時，快門是不會再打開了。

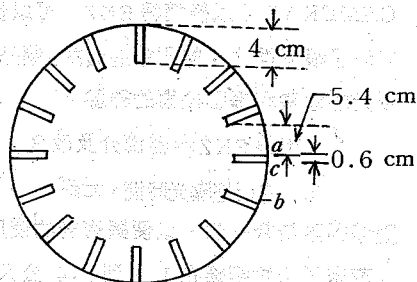
3. 多閃孔的設計：

(1) 如何修正馬達轉速：我們找到了一個減速馬達，經多次的測定其每轉 100 圈的平均時間約為 75 秒，但由於未裝穩壓設備，其轉速常有 ± 秒的誤差。所以在每次照相前都應當再測定 100 轉的時間，以期符合當時電壓情況，當然即使不作修正，對每 100 轉只有 ± 秒的誤差而言，則每轉的誤差只有 ± 0.01 秒，何況轉盤上刻有 16 格，其誤差只有 ± 1/1600 秒了，已可忽略。

(2) 如何設計多閃盤：如圖二所示，我們預定落體所落之距離為 170 cm 則由①式 170

$$= \frac{1}{2}gt^2, \quad t = 0.589 \text{ sec.}$$

由上述轉盤的週期



圖(二) 多閃盤

(T) 為 0.74 秒所以全部過程並未超過一轉的週期，因此我們為了多閃孔的準確把轉盤分成 16 孔（如圖二）。

並由圖計算，則 ab 的時間為 $\frac{75}{1600} = 0.046875$ sec，而 ac 的時間為 $\frac{0.6}{6} \times 0.046875 = 0.0046875$ 秒

(3) 像的個數：預定落體落下 170 cm 需要 0.589 sec 作為參考，而每閃一次的時間為 0.046875 sec 所以應閃動的次數為

$$\frac{0.589}{0.046875} = 12.6 \text{ 次。}$$

若加上原靜止的第一球

，則應攝得 14 個球像。

(4) 像的長度：取直徑為 5.06 cm 的塑膠球作為落體，則其像在 0.0046875 秒的感光時間中，仍為作加速度運動。若以第 14 球（最末球）為例：

$$\begin{aligned} \bar{V}_{14} &= \frac{S_{14} - S_{13}}{t_{14} - t_{13}} = \frac{\frac{1}{2} \times 980 \times (13 \times 0.046875)^2}{0.046875} \\ &\quad - \frac{\frac{1}{2} \times 980 \times (12 \times 0.046875)^2}{0.046875} \\ &= 574.22 \text{ cm/sec} \end{aligned}$$

如圖第 13 球到 14 球的分析：

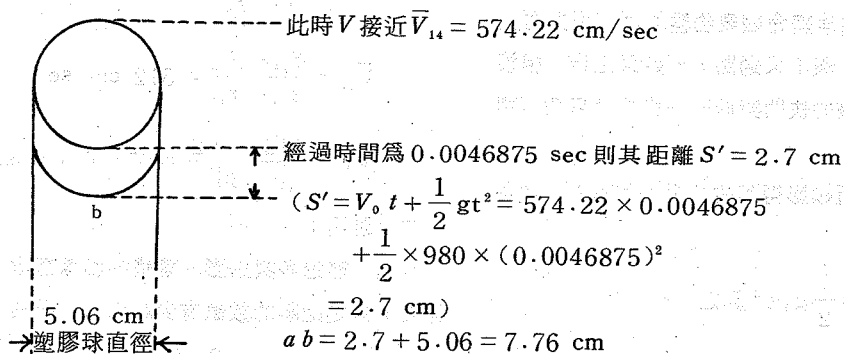
現將 170 cm 之全景容於 8.5 cm 的相片中，又設第 14 球的像長為 x cm，則 $170 : 8.5 = 7.76 : x$ ， $\therefore x = 0.388$ cm 而第一球（靜止球）的像長 y 應為 $170 : 8.5 = 5.06 : y$ ， $\therefore y = 0.253$ cm，由此可見二球在相片中的像長有着很大的差別。為了彌補此誤差，所有球像位置都應以圖三的 a 點作為標準。

4. 如何使落體與快門同步：如圖四

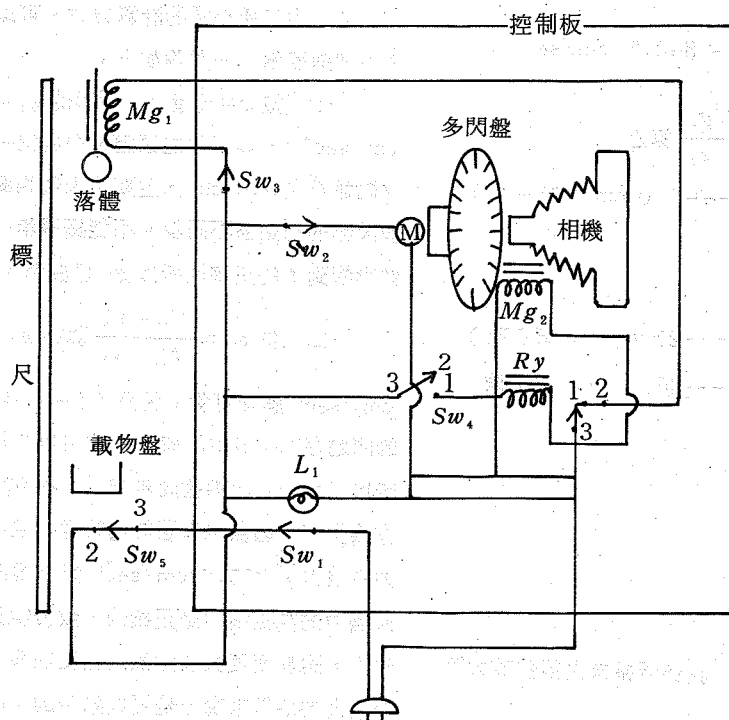
(1) 圖四說明：

① 綠色為實物：如紅色說明

② 藍色為電路圖： Sw_1 為總開關， Sw_2 為馬達開關， Sw_3 吸引落體的電磁鐵 Mg_1 開關， Sw_4 為快門電磁鐵 Mg_2 及繼電器 Ry 的



(圖三)



(圖四)

開關， Sw_5 載物盤壓動開關， L_1 指示燈。

(2) 工作原理：

① 準備攝影： Sw_1 、 Sw_2 、 Sw_3 、 Sw_5 以及 Ry 外線通路，此時 L_1 發光，表示已準備完成。插入相機，令其快門洽在 Mg_2 的連桿上。

② 攝影：按下 Sw_4 ，使 3 與 1 通路，

則同時引起④ Mg_2 工作，相機快門被打開。⑤ Ry 的 3 與 1 斷路，以致 Mg_1 無磁，落體下降。因為 Sw_2 已在準備時接通，多閃盤一直已轉動。⑥由④與⑤之同時工作，使相機的快門與落體同步。

③ 攝影完成：當落體落入載物盤時由其動能的衝壓，使 Sw_5 的 3 與 1 斷路，則全機無

電, Mg_2 無磁, 快門關閉, 攝影隨落體之下落而同步完成。當然落體會因載物盤的反作用力而上跳, 使 Sw_3 的 3 與 1 又通路, Mg_2 又工作, 但沒有關係, 因相機的快門對於同一張相片只會打開一次。

(二) 我們所攝影得到的結果: 如圖五, 並請參閱照片

1. 按 $S = \frac{1}{2} g_1 t^2$ 算之

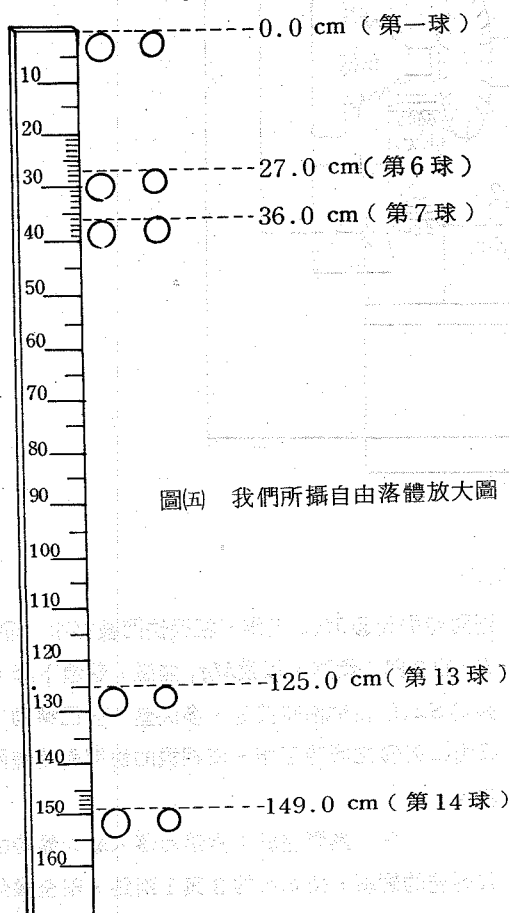
$$S_{14} = 149 \text{ cm}$$

$$t = 13 \times 0.046875$$

$$= 0.609375 \text{ sec}$$

$$\therefore g_1 = \frac{2S}{t^2} = 802.5 \text{ cm/sec}$$

2. 按 $g_2 = \frac{\bar{V}_{14} - \bar{V}_7}{t_{14} - t_7}$ 算之



圖(五) 我們所攝自由落體放大圖

$$\bar{V}_7 = \left(\frac{S_7 - S_6}{t_7 - t_6} \right) = 192 \text{ cm/sec}$$

$$\bar{V}_{14} = \frac{S_{14} - S_{13}}{t_{14} - t_{13}} = 512 \text{ cm/sec}$$

$$g_2 = \frac{512 - 192}{0.326} = 975.6 \text{ cm/sec}^2$$

(三) 討論:

1. 經過多次攝影, 落體的影像情形, 均如圖五, 只是距離的數值有少許出入, 而其某次的速度, 則均可按 $\bar{V} = \frac{S - S_0}{t - t_0}$ 而變化。所以圖五為正確。

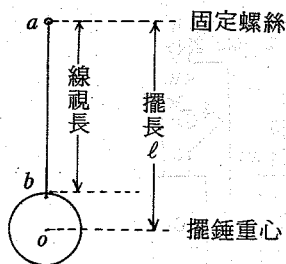
2. 由二種不同的計算方式, 可以得到二個重力加速度值, 茲討論如下:

(1) 按 $S = \frac{1}{2} g_1 t^2$ 所得的 $g_1 = 802.5 \text{ cm/sec}^2$, 其誤差之原因, 在於第一球的正確位置並不是 0.0 cm。主要是因為相機的快門與多閃盤的起始格不同步。不能攝得第一靜止球的像影響到 t 的正確性所以 g_1 應放棄。

(2) 按 $g_2 = \frac{\bar{V}_{14} - \bar{V}_7}{t_{14} - t_7}$ 算得 $g_2 = 975.6 \text{ cm/sec}^2$ 應屬可靠, 因為 $t_{14} - t_7$ 中沒有同步的問題存在, 且 S_{14} 與 S_7 均可以相片為依據, 所以已排除起始點的同步困難。而 $975.6 < 980$ 亦為正確, 因為本省屬於低緯度, 且有空氣的浮力和阻力, 975.6 cm/sec^2 對高雄縣阿蓮鄉阿蓮國中的實驗室中是正確的, 致於空氣的浮力和阻力, 對於密度大於空氣的密度很多, 且速度並不太大的落體來說, 是可以忽略的。而且在嘉南平原來說, 海拔都不太高, 所以因高度所引起的誤差是有限的。

(3) 由照片顯示, 鋼球 (直徑 2.7 cm) 與塑膠球 (直徑 5.06 cm) 同時落地。足以證明伽利略實驗的正確性。也就是說, 自由落體的速度與物體的體積、重量無關。

4. 若將塑膠球改為保麗龍球, 且與鋼球的體積相等, 如照相。則顯而易見, 兩球不能同時



圖七

說明

$$bo = 1/2 \times 5.35 = 2.675$$

但由於尺有誤差所以必須做適當的修正。

3. 操作過程

(1) 首先用尺量定擺長 ℓ 再使擺錘在 L_3 ，與 Cds 間來回自由擺動，不要碰到其他任何東西。

(2) 使 Sw_1 的 2 接 3，此時 Ry_1 及 Ry_2 就有敲擊聲，且 L_1 會閃光若沒有聲音可調可變電阻 R 。

(3) 按 EC_1 使其歸零，按 EC_2 的 “ ℓ ” 同時撥動 Sw_5 使 1 與 4 通路此時的 EC_2 只要 Sw_5 的 1 接 2 (空極) 即可記時。

(4) 左右兩手同時使 Sw_2 ， Sw_3 的 1 接 3，則 EC_1 就可因 Cds 反應而每一次加 “ ℓ ” 而 EC_2 已開始記時，此時立即將 Sw_3 的 1 接 2 (空極) EC_2 已自動連續記時了。

(5) 當 EC_1 的數字顯示需要的數字時 (例如預定測量 100 週的時間，則當數字到達 101 時，即為希望停止的數字) 右手按 Sw_4 使 1 接 2。此時 EC_1 及 EC_2 的數字均在 Ry_2 的次一次工

表 (1)

擺 幅	10° ~ 20°		20° ~ 30°		30° ~ 40°	
擺 長 ℓ (cm)	25.775	98.98	25.775	98.98	25.775	98.98
擺 動 次 數	10	10	10	10	10	10
所需時間 sec	10.2	20.0	10.2	20.0	10.2	20.0
週期 T 秒 / 次	1.02	2.00	1.02	2.00	1.02	2.00

作後同時停止。而 EC_1 的數字減 1 除 2 即為單擺的次數。 EC_2 的數字減 1 除 10 即為所經過的時間秒數。

(三) 測定的結果

1. 求證擺幅與週期的關係：

(1) 控制變因 $\ell_1 = 25.775$ cm，

$$\ell_2 = 98.98$$

擺動 10 次，錘重 = 68 gw，

錘半徑 = 2.675 cm

改變變因：擺幅

(2) 測量結果：如表(1)

表(1)擺幅與週期關係

(3) 討論：

① 由表(1)可知擺幅在 10° ~ 40° 之間時如果擺長不變，則週期恒為一定值。

② 由 $\ell_1 = 25.775$ cm， $T_1 = 1.02$ HZ^{-1} 代入 $T = 2\pi \sqrt{1/g}$ 則 $g_1 = 978.04$ cm/sec^2 在台灣南部來說，此值已甚精確可靠。

③ 由 $\ell_2 = 98.98$ cm， $T_2 = 2.00$ HZ^{-1} 可得 $g_2 = 976.89$ cm/sec^2 與 g_1 比較則少 1.15 cm/sec^2 究其原因可能是空氣的阻力改變，或測量用尺欠準確。

④ 振幅在 10° 以下，由於本機為光電感應機械，必須有相當直徑的球，才能造成反應的暗影。100° 以下範圍太小 Cds 會全部被暗影所遮沒，以致不能反應。

⑤ 40° 以上已非本實驗所需，所以不必測定。

表(2) 錘重與週期的關係

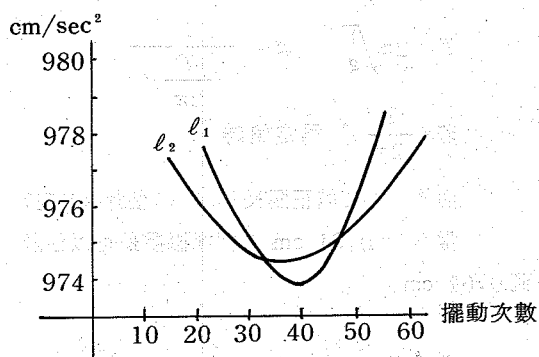
錘重 gw	錘半徑	錘體積	密度 gw/cm ³	擺動次數	週期
18 gw	1.17 cm	23.23 cm ³	0.77	20	1.035 Hz ⁻¹
86 gw	2.52 cm	67.00 cm ³	1.28	20	1.035 Hz ⁻¹

表(3) 用 18 gw 塑膠球測重力加速度

擺長 ℓ (cm)	$\ell_1 = 25.57$ cm				$\ell_2 = 97.61$ cm			
EC ₁ 數 字	41	61	81	101	41	61	81	101
擺動次數	20	30	40	50	20	30	40	50
EC ₂ 數 字	204	306	408	509	398	597	796	994
所需時間 sec	203	305	40.7	50.8	39.7	59.6	79.5	993
週期 T (Hz ⁻¹)	1.015	1.017	1.018	1.016	1.985	1.987	1.988	1.986
重力加速度 (cm/sec ²)	979.85	976.00	974.08	977.92	977.99	976.02	975.04	977.01

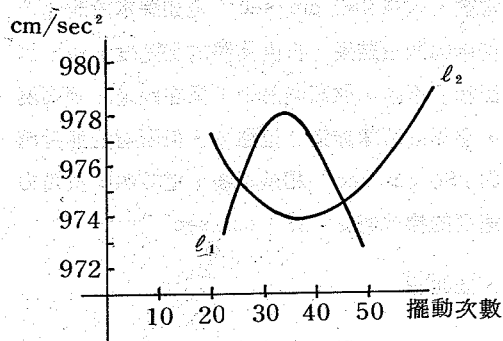
表(4) 86 gw 塑膠球測定重力加速度

擺長 ℓ (cm)	$\ell_1 = 25.125$				$\ell_2 = 99.6$			
EC ₁ 數 字	41	61	81	101	41	61	81	101
擺動次數	20	30	40	50	20	30	40	50
EC ₂ 數 字	203	303	404	506	401	602	802	1002
所需時間 (sec)	20.2	30.2	40.3	50.5	40.0	60.1	80.1	100.1
週期 T (Hz ⁻¹)	1.010	1.007	1.0075	1.010	2.00	2.003	2.003	2.002
重力加速度 (cm/sec ²)	972.35	978.16	977.19	972.35	977.09	974.17	974.17	975.14



圖(八) 用 18 gw 塑膠球所測重力加速度

2. 求證錘重與週期的關係：

(1) 控制變因： $\ell = 25.57$ cm 擺動次數20 次，擺幅在 $10^\circ \sim 20^\circ$ 之間改變變因：錘重

圖(九) 86 gw 塑膠球所測重力加速度

(2) 測定結果：如表(2)

(3) 討論：只要錘的密度比空氣的密度 (0.001293 g/cm³ STP) 大很多，則當擺長

一定時，錘重與週期無關。

3. 求當地的重力加速度

(1) 以 18 gw $r=1.77$ cm 的塑膠球作為擺錘時，測量結果如表(3)及圖八。

(2) 以 86 gw $r=2.675$ cm 的塑膠球作為擺錘的測量結果，如表(4)及圖九。

(3) 討論

① 根據表(3)圖八及表(4)圖九各測定的重力加速度的分配很不規則。是證影響測量結果的因素很多，例如 ℓ 的長度誤差，時間不能測到百分之一秒，繼電器不能追隨工作（此因素應無問題，因為開始記時的誤差與記時完成的誤差，恰能抵消）空氣阻力的次數等，都能直接影響。所以圖八圖九已無研究的價值。只能就表(3)表(4)中各接近值（如紅線所示者）求其平均值 977 cm/sec^2 作為台灣南部的重力加速度標準值以校驗圖五的 g_2 。

② 以圖五的 $g_2=975.6$ cm/sec^2 與表(3)(4)的 977 cm/sec^2 比較足證二個方法都還有誤差，所幸誤差已不太大，且在二值中當以 977 cm/sec^2 為準，因為圖五並不是真正的自由落體。

③ 但是在一般的計算中，除了有特殊的規定外，重力加速度仍以 980 cm/sec^2 為運算常數，因為 980 cm/sec^2 是如課本所說：“由精確的測量結果，自由落體的加速度 g 值，因地面稍有不同，愈高空愈小，又在距地面等高度時，愈靠近地球赤道 g 也愈小，但所有的測量值都與 980 cm/sec^2 相差不多，這數值叫做重力加速度的標準值 $g=980$ cm/sec^2 ”

四、總討論

(一) 根據上述兩種測量重力加速度方法，對於吾人量度上造成之誤差，影響 g 值之大小討論於後

1. 以照相法所求 g 值

$$S = \frac{1}{2} g t^2 \quad g = \frac{2S}{t^2}$$

(1) 若時間準確，長度量度估計值只能達到 mm 其所造成之誤差分析如下：

若 $S = S$ (真正長度) + ΔS (估計值誤差)
當 $\Delta S = 0.1$ cm 時

$$\text{則 } g' = \frac{2(S + \Delta S)}{t^2} = g + \frac{2\Delta S}{t^2}$$

設 $t = 0.04$ sec

$$g' > g, \quad g' - g = \frac{2\Delta S}{t^2} = 125 \text{ cm/sec}^2$$

所以長度量度誤差在本實驗未能使用更精密儀器來測定時，其影響 g 值誤差甚大。

(2) 若長度準確，時間量度估計值所造成之誤差

若 $t = t$ (真正時間) + Δt (估計值誤差)

當 $\Delta t = 0.000625$ sec 時 (預定 1600 次閃光誤差 1 秒)

$$\text{則 } g = \frac{2S}{(t + \Delta t)^2} = \frac{2S}{t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2}$$

設 $t = 0.04$ sec

其中 $2t\Delta t + \Delta t^2$ 值甚小，因此 t 值所造成之誤差可予忽略。

2. 以單擺所求 g 值

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad g = \frac{1}{\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2}$$

若 $\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$ 為定值時

而 $\ell' = \ell$ (真正擺長) + $\Delta \ell$ (估計值誤差)

當 $\Delta \ell = 0.01$ cm (因單擺擺長可以估計到 0.01 cm)

$$\begin{aligned} \text{則 } g' &= \frac{\ell + \Delta \ell}{\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} = \frac{\ell}{\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} + \frac{\Delta \ell}{\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} \\ &= g + \frac{0.01}{\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} \end{aligned}$$

(下接 36 頁)

整數三角形(Heronian Triangles)

數學科 高中教師組 第三名

作者姓名：花錦銘

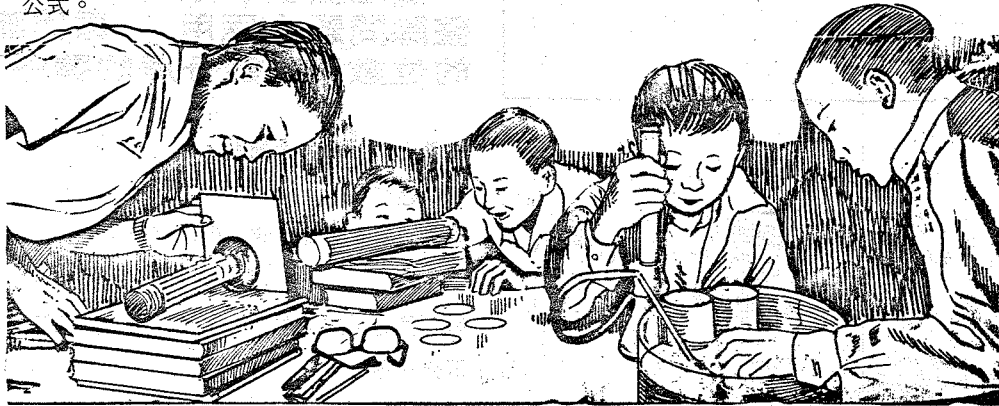
學校名稱：台北市立中山女子高級中學

研究目的：探討整數三角形

研究內容：

- (1) 定理 1：整數三角形的面積必為 6 的倍數
- (2) 定理 2：並非每一個 6 的倍數皆有一整數三角形與之對應。
- (3) 等腰整數三角形三邊的公式。
- (4) 推論 1：等腰整數三角形必可由兩個相同的畢氏三角形組合而成。
- (5) 定理 4：整數三角形三邊成等差數列則此三角形必可由兩個畢氏三角形組合而成。
- (6) 定理 5：由一組等差數列的 Heronic triples 導出另一組等差數列的 Heronic triples 的公式。

- (7) 定理 5 之已知條件若為 Primitive Heronic triples 則所導出的亦為 Primitive Heronic triples。



(上接 50 頁，中華民國第十九屆中小學科學展覽優勝作品選載(上))

$$\text{若 } T=1 \quad \text{則 } g'_1 = g + 0.3947856$$

$$T=2 \quad \text{則 } g'_2 = g + 0.0986961$$

所以本實驗長度量度誤差影響 g 值較小可以忽略，且擺長愈長其誤差愈小。

(二) 本作品可直接作為物理教具之用，使抽象為具體使我們對重力加速度有更深刻的了解。

(三) 本作品對本省的重力加速度，提供了直接的證據，不再是“人云亦云”地仰人鼻息，提高國人的自信心共同為國家前途攜手奮鬥。

(四) 當然我們限於學識和經濟能力，作品的本身還有很多缺點，誠盼各先進惠予指教和支持，衷心感激。