青少年世界中的數學(四)

Paul Rosenbloom 著　　黃敏晃 譯

四、再談數學模型（mathematical model）

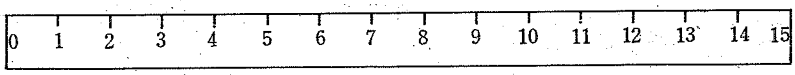
當我們想對眞實物理世界作一番描述時，我們才能體會到愛因斯坦講過的一句話是多麼的切貼：「上帝喜歡惡作劇，跟人開玩笑捉迷藏，故意不把宇宙的規律明白地顯示出來，但祂的心眼不致壞到把這些規律完全掩蓋起來，不讓人找出來的地步。」

宇宙規律的澈底把握，顯然超出了人類小得可憐的腦袋的能力範圍。但若我們能善加利用上帝給予我們的一切，我們還能得到部分的理解。這些少得可悲的成功，竟然也剛好足以鼓舞我們的士氣，堅定我們對「宇宙自有其神妙規律」的信念。

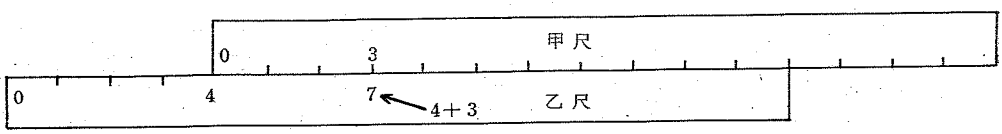
爲了把握微小的成功希望，我們必須把宇宙的實際情況加以簡化，甚至於理想化，以便得到我們的腦袋能控制得住的形像。我們作了去蕪存菁的工作，選出實質的要點後，所能得到的精確描述，就是一個數學模型。

我們可以由此出發，利用邏輯推論得到結果，作預測，並以實驗觀察來驗證我們的預測。若我們的預測越能符合實際，則我們的數學模型就越完善，我們用起來也越具信心。反之，若我們的預測有錯誤，我們就得對數學模型加以修正，使趨於完美。

刻度尺的邊沿，展示了數目與位置間的一對一對應，所以，所牽涉到的數系（註一），就可看成是刻度尺邊沿上位置與距離的一個數學模型。數的運算可用位置間的距離來加以說明。譬如說，學生可以把「加3」這個運算，看成是向右移動3格的操作（注意，若所用的尺有公分與公厘刻度，則什麼是1格要事先定好才行）。所以，4＋3就是由刻著4的位置，向右移了3格後得到的位置。



爲了方便操作起見，學生可用兩把一樣的刻度尺操作：把甲尺的刻度0，對準乙尺的刻度4，此時甲尺的刻度3所對的乙尺的刻度，就是4＋3的結果（下圖）。



如果他對刻度尺的這種操作加以研究，他會發現一些規律。譬如說，由某位置向右移3格後，再向右移4格所得的結果，總是同由此位置一次向右移7格是一樣的。他在幾個位置試過後，用數學式子寫出如下：

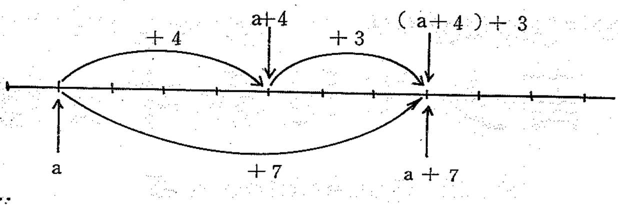
（註一）　使用的尺若只有公分刻度，則所牽涉的數系爲整數系，若尺上也有公厘刻度，則有兩種可能情形：以公厘爲單位，1公分爲 10，則可作兩位整數的運算，所牽涉的仍然是整數系；若以公分爲單位，則1公厘爲0.1，此時可作小數的運算，所牽涉的就是有理數系。這裏最終的目的要引出實數系。

$(0+4)+3=0+7$

$(1+4)+3=1+7$

$(2+4)+3=2+7$

……………………………



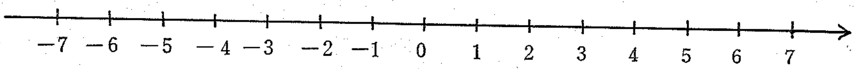
這些式子的等號左邊表示由0，1，2等起點開始，向右移4格後再向右移3格，等號右邊則表示由0，1，2等起點一次向右移7格。當他把這些式子歸納成一個一般性的結果後，他就得到了一個數學恒等式如下：

$$(a+4)+3=a+7$$

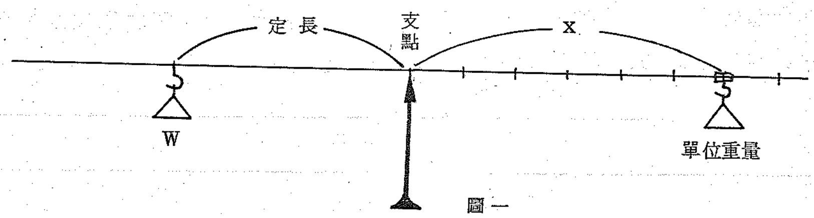
其中a可以爲任意數。換句話說，由任一個刻度出發向右移4格後，再向右移3格的結果，與由此刻度一次向右移7格的結果是一樣的。這樣他可以初步的體會到恒等式的意義：不但此恒等式是他自己歸納得到的，而且在這裏恒等式的體會，又可以透過具體的操作達成，可以說是完全符合國中二年級以下的學生的學習心理（註二）。

此處的要點在於，像數系（包含其運算與性質）這樣的數學模型，對現實世界的某一部分現象，提供了相當良好的描述，而且我們還可成功的用以預測下次實驗的結果。

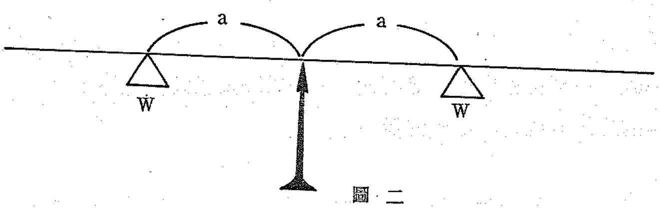
爲進一步申明這點好處，我們應該把刻度尺向兩頭無限延長（注意到，此時負數也引進來了，數的運算應包含有號數的運算在內）如下圖，並用由我們數學模型中分析出來的結果，來計算天體中各星球的距離。事實上，對很大（或很小）的距離，我們只能依賴間接度量，也就是利用我們能直接度量的事物，所建立出的有關距離的關係中，抽出可資運用的結果，才能量出其距離。



數系這個數學模型，若只對位置與距離有用處，對學生就已大有學習的價值了，何況還有許多其他的用處呢！譬如說，學生可把數系用在天平或桿秤上：假定（圖一）他在支點的左邊固定一掛鉤，並使支點右邊的掛鉤可以移動。他會發現：每當他在左掛上掛了一個重量，掛著單位重量的右鉤，就得調在一個確定的位置上才能平衡；而且兩個等重的東西，只有掛在與支點同距離的兩端，才會平衡，反過來說，掛在與支點同距離的兩掛鉤上能平衡的兩樣物件，一定等重（圖二）。



圖一



圖二

（註二） 皮亞傑認爲此階段的兒童，還處於由具體操作期進入形式操作期的過渡時期。一般認爲此階段兒童學習抽象式子的最有效方式，還是透過具體物的操作。

如果他把左掛鉤掛在離支點一固定單位長的位置，並在支點右邊按此單位長做上記號，則掛在左鉤上的重量，就可用掛著單位重量的右鉤所在的位置（與支點的距離）量出來了。如此，數系這個數學模型，也可應用以解釋重量的現象上。

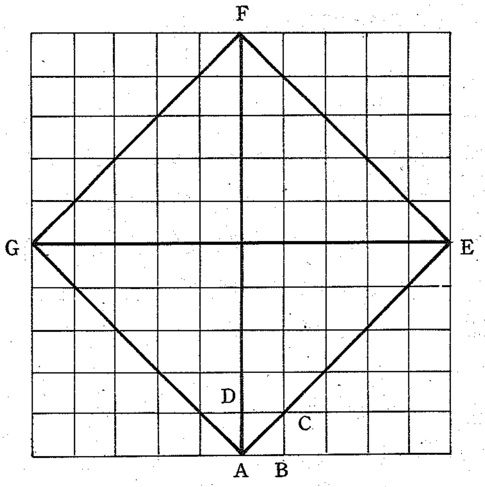
採用同樣的方式，他應該利用數系來解釋有關面積、體積、溫度、電壓等在他生活環境中可以碰到各式各樣的數量現象。如此，學生才能體會到數系這個數學模型，為什麼是中小學數學課程中的主要教材。

學生（其實每個使用數學模型的人）應該學到，數學模型不是能治百病的萬靈丹，現實物理世界中的事物現象，比數學模型能描述的要複雜得多，數學模型只適用於解釋其部分或局部的現象。

關於這點，我們也可以在不同的學習階段放入適當的教材。例如，在國中二年級以下的學生，可量出一疊一元硬幣的厚度，以計算硬幣的個數（6個1元硬幣的厚度約為一公分），或以其重量計算其個數。由於使用過的硬度磨損的程度不同（其實，連剛出廠的硬幣也不一定完全等厚等重），而會產生一定程度的誤差。如果硬幣的數目少，這些誤差大概不致於影響到個數，但若數量多時，誤差就可使我們少算好幾個硬幣。

當然有些學生會建議，為什麼不一個一個數呢？這樣硬幣的數目一定準確。問題在於採取完全準確的數學模型是否一定實際，例如製造硬幣的工廠出貨時，就不可能一個個的數，那要僱用多少人才算得清楚呀？一卡車硬幣以重量來計算只要幾秒鐘，其誤差可能是幾百元，但一個個數所花的人工可能要幾萬元。那種方法划算呢？像這類型的教材一定要出現，使學生理解到，我們有時會基於實用的觀點，採取比較不準確的數學模型。

數學模型不能準確的另一困難在於：許多連續量（continuous quantities）本來就量不準，最淺顯的例子是$\sqrt{2}$，即邊長為1的正方形的對角線長。假定我們以一公分為單位長畫出下圖，則可量線段AE的長約為七公分，所以線段AC的長大約是$7/5=1.4$公分。



由於學生所使用的刻度尺不很精細，他們不見得會覺察到誤差的存在。但要求他們計算面積後，誤差就會明顯化了：所有方格的面積是$10\times10=100$平方公分，正方形AEFG的面積為其一半（這可以要他們用摺疊方法加以驗證），即50平方公分，但$7\times7=49$平方公分。由此可見，7公分比AE的實際長要短，換句話說，AC的長應該比1.4公分長些。

我們應該讓學生想想，問題出在那裏？該如何解決？大部分的學生大概只會胡思亂想，答非所問，這也沒關係。也許有那麼一、兩位學生會想到把上圖放大，以算出更精確的值（若沒有學生想出來，則教師就應加指導）。譬如說，如果以24×24個方格來畫圖，我們就可以得到更精確的數值（譯者註：這裏得到的$\sqrt{2}$的近似值是$17/12=1.415$，是個過剩近似值，但前面得到的近似值$7/5=1.4$則是個不足近似值）。

有了這樣的經驗後，學生才能體會到在實數系中，雖然有些數不能以十進小數完全寫出來（這裏牽涉到$\sqrt{2}$不為有理數的證明，應該在高級中學時才能讓他們有這種經驗），但我們可以取得相當接近的十進小數作為近似值。

實數系這個數學模型是實際數量的理想化，即當我們取定一個度量尺度後，分離量（discrete quantities）或連續量的運算與大小比較等，就可以得到數系中的運算規律或優良性質的幫助。當我們無法直接測量或數算時，這點尤其重要。

這裏得特別提出一件事來交待，學生對數系這樣強力的數學模型，常會有過分信任或依賴的態度。由於數系是中小學數學課程中的主要教材，這種態度實在不足爲奇。但我們並不覺得這種態度是很健康的，所以我們建議數學課程內應包含一些教材，使他們得到一些反面的經驗（negative experience），以便提高他們的警覺。

怎樣的數學素材可以達到這樣的目的呢？我們這裏提出智商這個例子，是由於智商（intelligence quotient，簡稱 IQ）這個名詞，已經在報章雜誌上普遍使用了，現在很少學生不知道自己的智商是多少的。但這不見得就是最好的例子，但可供參考。

智商是心理學家爲測量人的智力高低，而造出來的一種人爲標度（artificial scale）。從某種角度來看，智商可以相當成功的描述一個人智力的高低，譬如說，智商爲 150 的人一般說起來，比智商只有 50 的人聰明得多。但把表達爲數的智商，拿來作數的運算，其結果在心理學上的意義就大有問題了：甲、乙兩個人智商分別爲50與 60，丙丁兩人智商分別爲 150 與160，其差都爲 10，但甲乙兩人智力的差別，與丙丁兩人智力的差異是一樣的嗎？心理學家如何解釋呢？

事實上，人的智力是由許多類型的能力組成的，智商專家們硬要把它套入一維（one-dimensional）的數學模型中，實在甚爲牽強。早在40年後，捨石湯（Thurstone）就提出應把人類的智慧表達在二維的平面上，甚至於三維的空間中（捨氏發展出來的智力測驗，是有六個層面的，即應表達在六維空間中）。近年來，哥特忙（Guttman）提出了比較有效的方法，把人類的智力表達在比較複雜的幾何空間中。

這個例子的副作用，在於自然的引出其他更複雜的數學模型（二維的、三維的，甚至更多維的空間），提起學生進一步學習的動機。這是在設計數學教材時，要加以注意的事情（未完待續）。

〔作者現職：國立臺灣大學數學系教授〕

（上接 13 頁，日本環境教育指導改善之諸問題）

(d) 行爲目標之構造（範例）

A；關於植物發育方法之推理	(b)表行爲表現表中 1. 4. 7. 目標之設定
B；決定測定點	表中15. 17. 19.
C；觀察測定地點景色之變化、特徵	表中 3.′ 3.″ 5. 6. 8. 16. ……
D；推想光與土壤、水分之關係	表中 5－1－3. 11. 11－2. 11－4.
E；推理植物相互間之作用	表中 7－1. 7－2－2. 10. 18－3.
F；使用光照計，推想光與植物發育之關係	表中 14. 16. 18. 22.
G；考察植物之分佈狀態	
⋮	⋮

四、結論

無論個人或社會團體，皆與環境有直接關係，即利用環境資源，行新陳代謝等。因此最後的結果，對環境必然的只有破壞，使它荒廢，尤其在現代，自然界的復原能力已無法補上人類的破壞速度，且從此以後，破壞與復原之間，差距愈來愈大，所遺留下來之缺點與害處亦更趨嚴重。因此以後之環境，應該不是以人類爲中心，而將以自然界全體之環境倫理爲中心。不然，人類將是無法生活，甚至無法生存。由此看來，環境教育之重要性更需要加強、加重。我們要把握正確的方向，實行在聯合國已設定之環境教育。我們應以認識正確的自然界做爲自然科教育之目標而努力不懈。

〔作者正印清逸：日本富山縣，新湊市放生津小學／富山縣，鳥獸保護員。譯者現職：國立臺灣師範大學生物研究所教授〕