算術平均與幾何平均定理及其應用

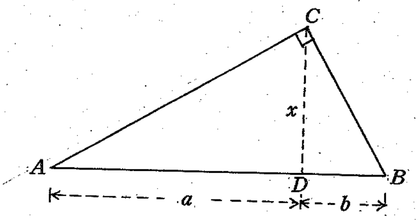
陳昭地

一、引言

微積分學的最基本功用是利用一些簡單的方法來解決一大堆有關極大值與極小值的問題。雖然在牛頓（1642－1727，Sir Tsaac Newton）與來布尼茲（1646－1716，Gottfried Wilhelm Leibniz）發明微積分之前，已能解決許多極值的問題，但它們的解答辦法，一般而言是相當的麻煩以致使得其他的問題似乎是不可捉摸。譬如說，當時已能解決有關簡單的**等周長問題**（iso-permetric problem）：在所有等周長的三角形中，以何種的三角形面積最大？在所有等周長的四邊形中，以何種的形狀面積最大？而在那時，對內接於給定橢球體的長方體盒，何者具有最大的體積仍無法給出圓滿的解答；此外，通常利用微積分求得的極值問題，若想利用更基本的方法往往顯得相當的繁複或者是件不可能的事，不過一些基本方法仍有其優點，如它比微積分提供更明顯具體的動機且常較易瞭解而不必具有太多的預備知識。在本文中，我們想介紹有關處理極值問題的最重要基本工具「算術平均與幾何平均定理」，探討它的內涵，如何出現與如何利用，再之提出與此定理等價的另一形式，最後利用它們導出極有用的古典不等式並應用這些不等式解釋在所有定體積的正圓柱體中，以直徑與高相等時，其表面積為最小。從以下的過程中，我們發現數學歸納法扮演重要的角色。

二、算術平均與幾何平均定理

下圖△ABC為直角三角形，AB為斜邊，CD為高，設其長為 x。



由△ACD～△CDB，於是

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$$

上面的比例式中之 x 值就稱為 a 與 b 的**幾何平均**，應注意的是：當 $a<b$ 時，則 $a<x<b$。另外，有關 x 的定義方式也可說成一與長、寬分別為 a、b 的長方形等積的正方形邊長。

一般而言，任給 n 個正數 x_1，x_2，…，x_n，其**幾何平均** G_n 就定成這些數乘積的 n 次方根，即

$$G_n=(x_1\cdot x_2\cdot\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}=(\prod_{j=1}^{n}x_j)^{\frac{1}{n}}$$

或者將 G_n 想成一與邊長分別是 x_1，x_2，…，x_n 的 n 度空間長方體等積的 n 度空間立方體之邊長！

至於有關算術平均的意義是大家所熟知的：n 個數 x_1，x_2，…，x_n 的**算術平均** A_n 就是這些數和的 $\frac{1}{n}$，即

$$A_n=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{\sum_{j=1}^{n}x_j}{n}$$

我們常用算術平均與幾何平均來從事某現象的估計工作，對於某些資料中某些量的平均往往比個別者更有意義，諸如天氣資料以這種方法敘述較易掌握。如此，自然發生的疑問是算術平均與幾何平均有何關係？這個答案也許大家現在都

很清楚，這裏我們想介紹如何逐步發現這個結果以致於利用數學歸納法得出的完整證明。

利用上圖的直角三角形ABC，我們很容易發現出在所有具有一定斜邊AB的直角三角形中，等腰直角三角形具有最長的高，因爲這個情況下 $x=\dfrac{a+b}{2}$，但$a+b$ =斜邊爲定值。故其他情況的直角三角形

$$\sqrt{ab}=x<\frac{a+b}{2}$$

故當a、b爲任意兩正數時

$$\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

事實上，利用實數的性質，易得上面的不等式(1)且知它們相等的充要條件爲$a=b$。

由不等式(1)，得到了在所有具有相等周長P的長方形中，以邊長的$\dfrac{P}{4}$之正方形面積爲最大的答案：

因，若設長方形的長、寬分別是a與b，則按條件知$P=2(a+b)$，由不等式(1)得

$$ab<(\frac{P}{4})^2\cdots\cdots\cdots(2)$$

且不等式相等的充要條件爲 $a=b=\dfrac{P}{4}$。

對於不等式(2)，也可給予另一個解釋方式：在所有具有一定面積A的長方形中，以正方形具有最短的周長：因，若設長方形的邊長分別是a與b，則

$$\frac{P}{4}=\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}=A^{\frac{1}{2}}，即$$

$$P\geqslant 4A^{\frac{1}{2}}$$

且$P=4A^{\frac{1}{2}}$的充要條件爲$a=b$

上面的兩個幾何上的解釋是在歐幾里得（365—300 B.C, Euclid）以前已經知道的結果！

由以上的探討，自然會問：對於任給n個正數x_1，x_2，…，x_n，$G_n\leq A_n$是否恒成立？它的結論是肯定的，我們把它寫成

定理 1：

（算術平均與幾何平均定理）n個正數的幾何平均恒小於或等於其算術平均；且此兩平均數相等的充要條件是這n個數都相等。

在證明本定理之前，讓我們看看上敍定理的幾何解釋並判斷其合理性。設有一以x_1，x_2，…，x_n爲邊長的n度平行長方體盒，其體積爲V，且設其周長爲P，則定理 1 告訴我們

$$V^{\frac{1}{n}}=G_n\leq A_n=\frac{P}{2^{n-1}\cdot n}$$

換言之，
$$V\leq\left[\frac{P}{2^{n-1}\cdot n}\right]^n$$

且 $V=\left[\dfrac{P}{2^{n-1}\cdot n}\right]^n$ 的充要條件爲

$$x_1=x_2=\cdots=x_n$$

因此，若P固定，當$x_1=x_2=\cdots=x_n$ 時，V爲最大，其幾何意義仍是在具有定周長P的n度長方體盒中以正方體情況體積爲最大；進一步地說，在具有定體積V的n度長方體中以正方體的情況其周長最短。這兩個幾何性質完全是前面所涉及平面上有關長方形面積周長問題之極自然推廣。

若想針對各種自然數n及確定的正數x_1，x_2，…，x_n，希望證得$G_n\leq A_n$，自然會想到數學歸納法的可行性了！

下面我們介紹法國數學家柯西（1789—1857，A. Cauchy）給出的基本精巧證明：

定理 1 的證明：柯西發現：當n爲2的乘方$G_n\leq A_n$都成立時，則對於任意自然數n，$G_n\leq A_n$自會成立。故，首先令

$$S=\{\,k\in N\mid G_{2^k}\leq A_{2^k}\,\}\text{ 則}$$

(1)當$k=1$時，由$x_1\cdot x_2=(\dfrac{x_1+x_2}{2})^2-(\dfrac{x_1-x_2}{2})^2$

故
$$x_1\cdot x_2\leq(\frac{x_1+x_2}{2})^2$$

且知

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x_1-x_2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

因此 $k=1\in S$

(2)當 $k\in S$ 時，由

$$\prod_{j=1}^{2^{k+1}} x_j = \left(\prod_{j=1}^{2^k} x_j\right)\left(\prod_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} x_j\right) \le \left(\frac{\sum_{j=1}^{2^k} x_j}{2^k}\right)^{2^k}\left(\frac{\sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}} x_j}{2^k}\right)^{2^k}$$

但

$$\left(\frac{\sum_{j=1}^{2^k}x_j}{2^k}\right)\left(\frac{\sum_{j=2^k+1}^{2^{k+1}}x_j}{2^k}\right)\le \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{j=1}^{2^k}x_j}{2^k}+\frac{\sum_{j=2^k-1}^{2^{k+1}}x_j}{2^k}\right)\right]^2$$

故得

$$\prod_{j=1}^{2^{k+1}} x_j \le \left(\frac{\sum_{j=1}^{2^{k+1}}x_j}{2^{k+1}}\right)^{2^{k+1}}$$

故由數學歸納原理知 $S=N$，換言之，當 $n=2^k$ 時定理得證。但若 n 不爲 2 的乘方時，則可取 $k\in N$ 使 $2^k>n$；設 $m=2^k-n$，則對於 2^k 個正數 $x_1,\cdots,x_n,\underbrace{A_n,\cdots,A_n}_{m\text{個}}$，引用上述情況知

$$\left(\prod_{j=1}^{n} x_j\right)A_n^m \le \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j + mA_n}{2^k}\right]^{2^k}$$

$$= \left(\frac{nA_n+mA_n}{2^k}\right)^{2^k} = A_n^{2^k}$$

即 $G_n^n A_n^m \le A_n^{2^k}$

故得 $G_n^n \le A_n^{2^k-m} = A_n^n$

因此得 $G_n\le A_n$

當然由上過程易知 $G_n=A_n\Leftrightarrow x_1=x_2=\cdots=x_n$

柯西的證明方式相當簡明清晰，它具有相當合理的動機，一般現行教材有關幾何平均小於或等於算術平均的證明大多衍用這個方法。

當定理 1 給予幾何解釋時，我們可以發現它與下面的敘述是等價：

定理 2：

n 個和爲定值之正數，當它們彼此相等時，其乘積爲最大。

這個定理隱含著兩組具有和爲定值 T 的 n 個正數，若其中的一組數較接近於 $\frac{T}{n}$，則其連乘積將會較大；考慮一組和爲 T 而不全相等的 n 個正數，其中必有一數小於 $\frac{T}{n}$，但另有一數大於 $\frac{T}{n}$；若將其較小的一數加大而另一對應較大的數減小但其和保持不變，我們可能寄望這新的 n 個正數之連乘積比原先的要大；但如果加大的那個數恒小於 $\frac{T}{n}$ 而減小的那個數恒大於 $\frac{T}{n}$，則這些手續永無止境而所得的乘積卻一直在增大中！由這個變化情況使吾人臆測到這 n 個數取等值 $\frac{T}{n}$ 時，可以得到最大的結果！現在，我們把這個說法轉換成下面的正式證明：

定理 2 的證明：任給 n 個和爲 T 之正數，我們欲證其乘積小於或等於 $(\frac{T}{n})^n$。當這 n 個數都等於 $\frac{T}{n}$ 時，其積就是 $(\frac{T}{n})^n$；否則，在這 n 個數中至少有一小於 $A_n=\frac{T}{n}$，另一大於 $\frac{T}{n}$。

設 a_1，a_2 爲各具如此性質的二數

令 $a_1=A_n-h$，$a_2=A_n+h'$　$(h, h'>0)$

若設　$a_1'=A_n$，$a_2'=A_n+h'-h$

則　$a_1'+a_2'=a_1+a_2$ 且

$$a_1'a_2'=A_n(A_n+h'-h)$$
$$=A_n^2+h'A_n-hA_n$$

而

$$a_1a_2=(A_n-h)(A_n+h')$$
$$=(A_n^2+h'A_n-hA_n)-hh'$$

故　$a_1'a_2'=a_1a_2+hh'$，但 $hh'>0$

因此，　$a_1'a_2'>a_1a_2$

如此，在原給定 n 個正數中當 a_1，a_2 爲 a_1'，a_2' 取代而其他保持不變；所得的新 n 個數之積比原先給定者爲大。

當這新的 n 個數彼此相等，則其原先的 n 個數之乘積小於 A_n^n ；否則，在此新的 n 個數中仍然有一數小於 A_n 而另一數大於 A_n。重覆上段的步驟，至多經由 $(n-1)$ 個手續，吾人可以得到一彼此相等的 n 個正數，而如此 n 個正數的乘積比原先 n 個正數之積爲大；故本定理得證。

三、應用定理1推得古典不等式之基本證明

下面，我們想提提定理1的應用，它能解決一連串有用的問題；特別地，我們將利用它來回答一個微積分學上熟知有趣的問題：在所有體積爲定值的正圓柱體中，以何種形狀的表面積爲最小？爲此，我們先利用定理1得出下列的Bernoulli 不等式之推廣：

定理3：(Ⅰ) 若 $x \geqslant -1$ ，$0<\alpha<1$ ，則

$$(1+x)^{\alpha} \leq 1+\alpha x ;$$

(Ⅱ) 若 $x \geqslant -1$ ，$\alpha<0$ 或 $\alpha>1$ ，則

$$(1+x)^{\alpha} \geqslant 1+\alpha x ,$$

且不等式(Ⅰ)、(Ⅱ)爲等式之充要條件是 $x=0$

證明 我們僅處理 α 爲有理數的情況，其他的情況可依極限觀念處理，或利用微積分之技巧，可參考（〔1〕，第222頁）。

(Ⅰ)設 $\alpha=\dfrac{m}{n}$ n，$m \in N$，且 $m<n$

把 $(1+x)^{\frac{m}{n}}$ 寫成

$$\sqrt[n]{\underbrace{(1+x)\cdot(1+x)\cdots(1+x)}_{m個}\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{(n-m)個}}$$

由定理1知

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} \leq \frac{m(1+x)+(n-m)}{n}=1+\frac{m}{n} x$$

且等式成立之充要條件是 $1+x=1$ 即 $x=0$ 。故(Ⅰ)得證。

(Ⅱ)當 $\alpha>1$ ，若 $1+\alpha x<0$ 時，顯然 $(1+x)^{\alpha}>1+\alpha x$

若 $1+\alpha x \geqslant 0$ 則 $\alpha x \geqslant -1$

則由(Ⅰ)之情況（此時 $0<\dfrac{1}{\alpha}<1$ ）

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} \leq 1+\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha x=1+x \quad 即$$

$$(1+\alpha x) \leq(1+x)^{\alpha}$$

且等式成立之充要條件是 $\alpha x=0$ 即 $x=0$

當 $\alpha<0$，若 $1+\alpha x<0$，顯然 $(1+x)^{\alpha}>1+\alpha x$；

但若 $1+\alpha x \geqslant 0$，選取 $n \in N$ 使得 $0<\dfrac{-\alpha}{n}<1$

考慮 $\left[(1+x)^{\alpha}\right]^{-\frac{1}{n}}$ 即 $(1+x)^{-\frac{\alpha}{n}}$

則由(Ⅰ)之情況，得

$$(1+x)^{-\frac{\alpha}{n}} \leq 1-\frac{\alpha}{n} x \text{，即}$$

$$(1+x)^{\frac{\alpha}{n}} \geqslant \frac{1}{1-\frac{\alpha}{n} x}$$

$$但 \quad \frac{1}{1-\frac{\alpha}{n} x}=\frac{1+\frac{\alpha}{n} x}{1-\left(\frac{\alpha x}{n}\right)^{2}} \geqslant 1+\frac{\alpha}{n} x$$

因此得知 $(1+x)^{\frac{\alpha}{n}} \geqslant 1+\dfrac{\alpha}{n} x$ 或

$$(1+x)^{\alpha} \geqslant\left(1+\frac{\alpha}{n} x\right)^{n} 。$$

同樣地，易見上面不等式相等的充要條件是 $x=0$；於是定理3得證。

注意：在定理3中，$y-1$ 取代 x，則(Ⅰ)與(Ⅱ)中不等式各變成

(Ⅰ)′ $y^{\alpha}-\alpha y \leq 1-\alpha$ （$y \geqslant 0$，$0<\alpha<1$）

(Ⅱ)′ $y^{\alpha}-\alpha y \geqslant 1-\alpha$ （$y \geqslant 0$，$\alpha>1$ 或 $\alpha<0$）

且(Ⅰ)′(Ⅱ)′爲等式之充要條件是 $y=1$

最後，我們想應用不等式(Ⅱ)′來回答有關在具有一定體積 V 的正圓柱體中，具有最小表面積的形狀：

設正圓柱體的半徑爲 a ，高爲 h ，則

$V=\pi a^{2} h$

其表面積 $S=2\pi(a^{2}+h)$

因 V 爲定數，以 $h=\dfrac{V}{\pi a^{2}}$ 代入 S 的公式中得

（下接9頁）

論。傳記作家巴尼須·霍夫曼以及其他的人都同想而且同意，就算不是愛因斯坦，不久總會有人想到特殊相對論，因爲舖路工作已經作好。然而，一般相對論所說明的物質使空間與時間「彎曲」這種聰明想法，完全只是屬於愛因斯坦的。

他在科學家中的聲譽迅速傳開。一九一九年，當英國天文觀測隊證實他的預卜，宣佈太陽的重力確實改變光線的路徑時，人們對相對論所持的懷疑立刻轉變成爲頌詞，同時他的人生也發生變化。

此後十年間，他到處演說，前往英國與美國擔任客座教授，又偕新夫人伊爾莎乘船前往他在波茨坦附近的避暑地喀普斯。他拒絕生活在希特勒的德國政府統治下，而永久搬到美國新澤西州普林斯頓高級研究所。他在這裏資助由納粹逐出而不斷到來的難民。

這時，他的科學作品，其產量已經減少。物理已經不只是他的方法論，而且也是他的宗教學，他不能接受反覆無常的宇宙。一九二九年，他告訴紐約的猶太教牧師說：「我相信斯賓諾莎的上帝，因爲祂使一切東西有序而且和諧，我不相信注意人類的命運與觀念的上帝。」他與斯賓諾莎的創造主繼續作內心的對話。他告訴霍夫曼說：「我常常問我自己：假使我是上帝，我會把宇宙作成這樣嗎？」當一個學生問他，如果一九一九年的觀測隊不能證實相對論，則將如何？愛因斯坦安詳地回答說：「那麼我應該覺得對不起上帝；可是，相對論畢竟是對的。」

一九三六年，愛妻伊爾莎去世，而他的健康狀態也每況愈下，雖然如此，愛因斯坦仍然保持快活與勤勉。霍夫曼記得，當他們一起在研究統一場論而遇到難題時，愛因斯坦總是用鄉音很重的英語說：「我要稍微想一想」——不久，他就得到令人滿意的新解答。

然而，解答愈來愈難，愛因斯坦毫無怨言地承認，他覺得愈來愈難決定應該拋棄那些答案。雖然如此，他永遠沒有放棄這個佔去他後半生的統一場論。他深信總有一項原理能把自然界的四種主要力量連結在一起。他曾經說過：「上帝是微妙的，而不是惡毒的。」然而，最後仍然證實，統一場論非常微妙，甚至愛因斯坦也無法建立。一九五五年四月十八日，他因大動脈瘤破裂而逝世時，他的未完成計算資料堆在身旁。然而，他在身後留下一個幾乎完全由他一手所創造的整個新科學世界。

〔取材自一九七九年三月十二日新聞週刊，譯者現職：國立臺灣師範大學物理系教授〕

（上接 38 頁，算術平均與幾何平均定理及其應用）

$$S=2\pi\left(a^2+\frac{V}{\pi a}\right)$$

上式中$\frac{1}{a}$的係數$\frac{V}{\pi}$不爲 2 外，其括弧中的式類似於(Ⅱ)′ $y^\alpha-\alpha y$，其中 $y=\frac{1}{a}$，$\alpha=-2$

但正圓柱體只要其半徑與高之比相等，則相似，於是，不失普遍性。可設 $V=2\pi$，此時

$$S=2\pi\left(a^2+\frac{2}{a}\right)$$

由不等式(Ⅱ)′知：當 $y=\frac{1}{a}=1$時，S 具有最小值。

又此時　$V=2\pi=\pi h$　故 $h=2$

因此，具有定體積V 的所有正圓柱體中，以其直徑與高相等時，表面積爲最小。

〔參考資料〕

〔1〕陳昭地、顏啓麟合著，數學分析第 222 頁，汝旭圖書公司（1978，2版）。

〔2〕N.D. Kazarinoff, Analytic Inequalities, 第 1－34頁，Holt, Rinehart and Winston (1961).

〔作者現職：國立臺灣師範大學數學系副教授〕