平方排列

李恭晴

一、引言

在高中時我們學習了排列的個數，例如甲、乙、丙三人排成一列，有(甲乙丙)，(甲丙乙)，(乙甲丙)，(乙丙甲)，(丙甲乙)，(丙乙甲)等六種排法，每一種排法都可以看做是一個函數，上列六個排列分別是

$$\begin{array}{l}1\to甲\\2\to乙\\3\to丙\end{array},\quad\begin{array}{l}1\to甲\\2\to丙\\3\to乙\end{array},\quad\begin{array}{l}1\to乙\\2\to甲\\3\to丙\end{array},\quad\begin{array}{l}1\to乙\\2\to丙\\3\to甲\end{array},$$

$$\begin{array}{l}1\to丙\\2\to甲\\3\to乙\end{array},\quad\begin{array}{l}1\to丙\\2\to乙\\3\to甲\end{array}$$

爲了方便起見，我們用數目字來代表甲，乙，丙三人，並將上列這些函數寫成從上到下的形式，而且將箭頭省略。這樣，上列六個排列就可以分別寫成

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

我們還可以再將上列的寫法簡化，這一次我們是以循環的關係來表示，例如上列第二個排法 $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$ 中，2與3的位置對調，我們就將這個排列寫成(2 3)，表示2變成3，3變成2，而不在這個“循環”中的1就保持不變。同樣的，第三個排列 $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ 可以寫成(1 2)，第六個排列 $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ 寫成(1 3)。第四個排列 $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ 可以寫成(1 2 3)，表示1變成2，2變成3，3回來變成1。同樣地，第五個排列 $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ 寫成(1 3 2)，表示1變成3，3變成2，2回來變成1。至於第一個排列 $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$ 中，三個數字都不變動，我們以(1)表示(我們也可以想像(1)代表1變成1，而2與3保持不變，即1，2，3都不變動。)

我們再看看另一個例子，排列

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&1&4&2&6&5\end{pmatrix}$$

可以寫成(1 3 4 2)(5 6)，表示1變成3，3變成4，4變成2，2回來變成1，5變成6，6又回來變成5。它可以看做是(1 3 4 2)與(5 6)這兩個循環的“乘積”。如果上列這個排列以P表示，我們也可以說

$P(1)=3$，$P(2)=1$，$P(3)=4$，

$P(4)=2$，$P(5)=6$，$P(6)=5$。

在這裏，$P(k)$就是表示排在k這個數字下面的數字，也可以說是k經過P這個函數的函數值。

在這一篇短文中，我們所要探討的問題是：是否對於每一個自然數n，我們都可以找到1，2，……，n的一個排列P，使得每一個數和它的函數值的和都是平方數？

二、每一個自然數n都是平方排列數

首先我們考慮從0開始到n的排列。如果P是從0到n中$n+1$個自然數的排列，而且對於從0到n中每一個數k(包含0與n)，$k+P(k)$都是平方數，那麼我們就稱P爲對應於n的一個**平方排列**，例如

$$\begin{pmatrix}0&1&2&3&4&5&6\\1&0&2&6&5&4&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

分別是對應於 6 和10的平方排列。

對於某一個固定的自然數n而言，如果能找到一個從 0 到n的平方排列，那麼我們就說n是一個**平方排列數**。上列的例子告訴我們，6 與10都是平方排列數。在這一節中，我們將證明每一個自然數都是平方排列數。首先我們證明

(＊) 所有具有r^2-1或r^2之形式的自然數都是平方排列數。

(＊＊) 若m爲平方排列數，$n>m$且$n+m$具有r^2-1之形式，則n也是平方排列數。

敍述(＊)是顯然的，因爲

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots\cdots & r^2-1 \\ 0 & r^2-1 & r^2-2 & \cdots\cdots & 1 \end{pmatrix}$$

與

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots\cdots\cdots & r^2-1 & r^2 \\ r^2 & r^2-1 & r^2-2 & \cdots\cdots\cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

分別是對應於r^2-1與r^2的平方排列，所以r^2-1與r^2都是平方排列數。

要證明(＊＊)，我們假設m爲平方排列數，並設P爲對應於m之平方排列，現在我們將P擴大成如下的排列P′：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\cdots & m & m+1 & m+2\cdots & n \\ p(0) & p(1) & p(2)\cdots & p(m) & n & n-1\cdots & m+1 \end{pmatrix}$$

這是一個從 0 到n的排列，對於從 0 到m中間每一個數k，$k+p'(k)=k+p(k)$爲一個平方數(因爲p是一個平方排列)，而對於從$m+1$到n中的每一個k，

$$k+p'(k)=m+n+1=r^2$$

也是一個平方數，所以p'是一個平方排列，因此n是一個平方排列數。

現在我們證明每一個自然數n都是平方排列數，我們將利用數學歸納法加以證明。

首先由(＊)我們知道1，3，4 都是平方排列數，對於 2 而言，排列

$(0\ 1)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$是一個平方排列，所以 2 也是平方排列數。令$n\geqslant 5$，且假設$1,2,3,\cdots\cdots,n-1$都是平方排列數。若$n$是一個平方數，或是一個平方數減 1，則由(＊)知$n$爲平方排列數。因此，我們可以假設$(r-1)^2<n<r^2-1$，由於$n\geqslant 5$，所以$r\geq 3$。

令$m=r^2-1-n$，則由$n<r^2-1$知$m>0$。又由$n>(r-1)^2$及$r\geq 3$知

$$m<r^2-1-(r-1)^2=2r-2\leq (r-1)^2<n$$

所以 $0<m<n$

由數學歸納法之假設知m爲一個平方排列數。又因爲$m=r^2-1-n$ 所以由(＊＊)知n也是平方排列數。

因此，由數學歸納法，可知每一個自然數都是平方排列數。

三、正平方排列數

現在我們考慮從 1 到n之間的自然數的排列，如果p是從 1 到n之間的自然數的排列，而且對於從 1 到n之間的每一個整數k，$k+p(k)$都是平方數，則稱n爲**正平方排列數**，p爲對應於n的一個**正平方排列**。例如

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	2	1	12	11	10	9	8	7	6	5	4

爲對應於12的正平方排列。

是不是每一個自然數都是正平方排列數呢？答案是否定的，例如1，2，4，6，7，與11都不是正平方排列數(請讀者自行查驗)。除了這些數之外，其他的每一個自然數都是正平方排列數，下面我們就來證明它。與上節討論一樣的我們先指出

(＊)′ 所有具有r^2-1之形式的自然數都是正平方排列數

(＊＊)′ 若m爲正平方排列數，$n>m$，且$n+m$具有r^2-1之形式，則n也是正平方排列數。

它們的證明與（＊）（＊＊）之證明完全一樣。

現在我們利用數學歸納法來證明除了1,2,4,6,7,與11之外，其他的每一個自然數都是正平方排列數。這是一個比較特殊的數學歸納法，第一步我們必須證明 $n=3,5,8,9,10,12,13,\cdots\cdots,24$ 都是正平方排列數，第二步再假設除了上列六個數外，從1到 $n-1$ 中其他每一個數都是正平方排列數而證明 n 也是正平方排列數。（為什麼第一步須要證明到24呢？請注意下面證明的每一個步驟）

要證明1到24中，除了上列六個數外都是正平方排列數，我們只須把所對應的正平方排列列出來即可：

$$n=3\ ,\quad p=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

$$n=5\ ,\quad p=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&2&1&5&4\end{pmatrix}$$

$$n=8\ ,\quad p=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\8&7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$$

$$n=9\ ,\quad p=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\8&2&6&5&4&3&9&1&7\end{pmatrix}$$

$$n=10\ ,\quad p=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\3&2&1&5&4&10&9&8&7&6\end{pmatrix}$$

$$n=12\ ,\quad p=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12\\3&2&1&12&11&10&9&8&7&6&5&4\end{pmatrix}$$

$$n=13\ ,\quad p=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13\\8&2&13&12&11&10&9&1&7&6&5&4&3\end{pmatrix}$$

$$n=14\ ,\quad p=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14\\8&14&13&12&11&10&9&1&7&6&5&4&3&2\end{pmatrix}$$

$$n=15\ ,\quad p=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15\\3&2&6&5&4&10&9&8&7&15&14&13&12&11&1\end{pmatrix}$$

$$n=16\ ,\quad p=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16\\8&7&6&5&4&3&2&1&16&15&14&13&12&11&10&9\end{pmatrix}$$

$$n=17\ ,\quad p=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16&17\\3&7&6&5&4&10&2&17&16&15&14&13&12&11&1&9&8\end{pmatrix}$$

$$n=18\ ,\quad p=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16&17&18\\3&2&6&5&4&10&18&17&16&15&14&13&12&11&1&9&8&7\end{pmatrix}$$

$$n=19\ ,\quad p=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16&17&18&19\\15&14&13&12&11&10&18&8&16&6&5&4&3&2&1&9&19&7&17\end{pmatrix}$$

$$n=20\ ,\quad p=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16&17&18&19&20\\15&14&13&12&11&10&9&8&7&6&5&4&3&2&1&20&19&18&17&16\end{pmatrix}$$

$$n=21\ ,\quad p=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16&17&18&19&20&21\\3&7&6&21&11&10&9&8&16&15&14&13&12&2&1&20&19&18&17&5&4\end{pmatrix}$$

$$n=22\ ,\quad p=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16&17&18&19&20&21&22\\8&2&6&21&11&3&9&1&7&15&5&13&12&22&10&20&19&18&17&16&4&14\end{pmatrix}$$

$$n=23\ ,\quad p=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&11&12&13&14&15&16&17&18&19&20&21&22&23\\8&23&6&21&11&3&9&1&7&15&5&13&12&22&10&20&19&18&17&16&4&14&2\end{pmatrix}$$

$$n=24\ ,\quad p=\left(\begin{matrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10\\24&23&6&21&11&3&9&8&7&15\end{matrix}\right.$$

$$\begin{matrix} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 5 & 13 & 12 & 22 & 10 & 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 21 & 22 & 23 & 24 \\ 4 & 14 & 2 & 1 \end{matrix}\right)$$

現在假設 $n \geq 25$，且假設 $1, 2, 3, \cdots\cdots, n-1$ 中除了上列六個數之外，其他每一個數都是正平方排列數，而證明 n 也是正平方排列數。

若 n 具有 r^2-1 之形式，則由 $(*)'$ 知 n 爲正平方排列數。

若 n 不具有 r^2-1 之形式，則可找到一個數 s，使得 $(s-1)^2 \leq n < s^2-1$

由於 $n \geq 25$，故知 $s \geq 6$。

令 $m = s^2-1-n$，則如前面證明可知

$$0 < m < n$$

①若 m 不等於 1，2，4，6，7，11 中的任何一個，則由數學歸納法之假設知 m 爲正平方排列數，再由 $(**)'$ 知 n 爲正平方排列數。

②若 m 等於 1，2，4，6，7，11 中的任何一個，則取 $m' = (s+1)^2-1-n$

則 $m' < (s+1)^2-1-(s-1)^2$

$= 4s-1 < (s-1)^2 \leq n$

（其中 $4s-1<(s-1)^2$ 是利用到 $s \geq 6$，而 $s \geq 6$ 是因爲 $n \geq 25$）

另一方面，$m' = s^2+2s-n > 2s+1 > 11$

所以 $11 < m' < n$

由數學歸納法之假設知 m' 是一個正平方排列數，又因爲

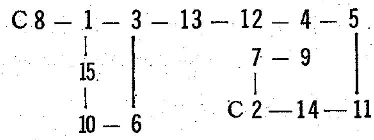
$$m' < n \text{，且 } n+m' = (s+1)^2-1$$

所以由 $(**)'$ 可知 n 也是正平方排列數。

因此我們證明了：除了 1，2，4，6，7，11 六個數之外，每一個自然數都是正平方排列數。

四、找尋正平方排列的方法

上面我們已證得除了少數 n 個自然數外，對應於每一個自然數至少都有一個正平方排列，至於如何找出這些正平方排列，這裏有一個一般的找尋方法。我們舉 $n=15$ 爲例，加以說明：我們考慮 1 到 15 之間的數，若兩個數加起來會是一個平方數，則用鏈將其連接起來，構成如下的數形圖：



由此可得

$$P = (9\ 7)(2)(14\ 11)(5\ 4)(12\ 13)(1\ 3\ 6\ 10\ 15)(8)$$

即

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 3 & 2 & 6 & 5 & 4 & 10 & 9 & 8 & 7 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

我們也可以由上圖，每次取兩個而得

$$p = (1\ 15)(10\ 6)(3\ 13)(12\ 4)(5\ 11)(14\ 2)(7\ 9)(8)$$

即

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

由此可知，若 n 爲正平方排列數，則對應於 n 之正平方排列可能不只一個。

讀者可以仿照上圖作出對應於其他自然數的平方排列圖。

五、結語

上列的問題可以轉換成（正）質排列的問題，若 p 爲從 1 到 n 之排列，且對於其間每一個 k，$k+p(k)$ 都是質數，則稱 p 爲對應於 n 的（**正**）**質排列**，n 爲（正）質排列數。我們也可以證明每一個自然數都是（正）質排列數，有興趣的讀者可以自行證明看看。

另外，我們也可以探討是不是對應於每一個自然數 n，都可以找到一個排列 p，使得 $k+p(k)$ 都是 Fibonacci 數，如果不是的話，那些自然數有 Fibonacci 排列？那些自然數沒有 Fibonacci 排列？

〔作者現職：國立臺灣師範大學數學研究所所長〕