探討國中階段機率與統計的教材內涵與指導方法(下)

陳冒海　譯

A生說：「毫無辦法可想了。雖然很疲倦，還是去用功要緊，被點中而答不出來，這個臉實在丟不起。但是……且慢，數學、社會、英文3科的點中率之和是

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{13}{20}=0.65$$

這計算正確嗎？」

○和的原理

I生說：「當然是正確的，但是三科都被點中的比率是

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{100}$$

還是佔有1％。」

○積的原理

○對調查、計算之結果的考察

A生說：「眞的嗎？三科都被點中，那還得了。」

B生說：「老師們如能商量一下，對同一學生不在同一天點中2科以上，那有多好。」

A生說：「但是被點中的次數終究是相同的，倒不如同一天被點中3次，以後就輕鬆了。」

B生說：「可是像數學老師那樣，今天雖被點中，明天照樣來，還是不能放心的。」

A生說：「這種點名的方法，不知其他班級是否也一樣？」

I生答：「很可能是一樣的。」

A生說：「那麼，我們這就去告訴其他班級，一定會受到歡迎的。」

B生說：「那麼我們這一班，就要變成爲標本了。」

I生說：「但是有作用的，只是對國文、社會與英文這三科，對數學科還是沒有什麼用。」

A生說：「關於國文的點名方式，其他班級可能也知道。有幫助的只是對英文科，因這與考試分數有相關關係。」

○對標本的認識

B生說：「對數學科也有幫助的，即使僅僅知道點名是亂七八糟那麼一點點。」

A生說：「那麼，我們就去告訴其他班級罷。」

B生說：「算了，這樣做，又要引起老師的注意。」

A生說：「但是數學老師並不是憑著一己之私去點名的，我們也就放心了。也許他那種點名的方法，說不定也是公平的。」

B生說：「也許是，但是還是用功要緊。對我來說，明天是點中率52％之日。」

I 生說：「你說對了，點中的機率在50％以上的場合，就要看做一定會被點中。」
A 生說：「但是未被點中的比率，還佔有35％，希望明天幸運來臨。」
B 生說：「三天之中，點中佔有兩天，還是用功第一，勤讀第一。」
A 生說：「眞是想不到身邊的事象，竟與數學這樣的有所關聯。」

○學生的感想

四、關於機率與統計之特性的指導

對於機率與統計所具有的性質應該如何去指導呢？讓我們從其意義與方法這方面來探討一下這個問題。

⑴機率是可以計量的：

依據近代機率論權威柯勾莫洛夫（Kolgomorov）公設化的機率論，定義機率爲一集合函數，即定義域中之每一元素皆爲集合，而以大於或等於零，而小於或等於 1 之實數爲值域的函數。然而當我們指導學生時，我們說：「投擲一粒骰子時，各點出現的機率爲⅙」，這個數“⅙”實際所指的是什麼呢？學生恐怕會不甚瞭解。所以還是需要從多次實驗所得的結果中，使學生認識**大數法則**，並透過**相對次數**使其理解實驗機率的意義，並演示如何計算機率給學生看。雖然分析事象發生之容易程度只能做到近似的程度，但依據實驗，機率是能夠測定的，關於這點應使學生充分認識。像這樣，以實驗與計算所得之値，就跟測定一物體的重量時一樣，也是一個測定之値。而這個測定値也像測定物理的重量的情形一樣，僅僅將它的有效數字的位數增加，常常是沒有什麼意義的，關於這點應設法使學生注意。又計量機率，不像計量物體重量那樣簡單而容易理解，所以對這種計量方法之介紹，在國中階段應特別加以留意，乃理所當然的要求。

⑵使學生理解機率是存在於什麼現象之中：

在計量東西的重量時，沒有重量的東西，像距離、光線等就不能成爲計量的對象。計量機率也是一樣，有機率存在的場合，才能計量，這點必需使學生理解。此外，機率是在事先就要去想的，如果在事後才去想，除非同樣的事象還會發生，否則去想機率就會變得毫無意義。也就是說：在同一條件之下是否有反復發生的可能？如果有，就去想；如果只是獨立的；單單發生一次的偶發事象，以後不會再發生，就不必去想。

此外一般所謂40歲的人平均還能再活34年，這並非就40歲的人個別地一個一個去想的，而是以40歲的人做爲一個集團，依據多年累積下來的寶貴資料所顯示，而在計算得出的結果更不是專對一個患有重病的40歲的人，去想他還能再活幾年，這一點必須加以注意。

再者機率是不存在於情感或意志之中的，而是存在於具體的事物或可能會發生的事象之中的。事象這句話的定義應該是「對某一試驗的結果所產生的事物」，而試驗是「可以反復去做與觀察」的。這說明了機率存在的場合，應使學生明瞭這點。

⑶機率 P 的意義：

假定可以求得某事象A的機率爲 P，此處 P 爲 1 至 0 之間的一個實數，那麼讓我們來想一想 P 的意義看。研究機率的學問——機率論，可以說是「研究包含有偶然性與蓋然性的數學結構之學問」。但是偶然性含有無規則，無法則的意味，而結構却是以規則性爲基礎的構想。如果將這些解釋綜合起來，機率論豈不變成奇妙的「研究沒有規則的事物的規則之學問」了。就如同「近似正確」這句話，也妙極了。「近似」與「正確」是意義相反的兩個形容詞。不過機率 P 的 P 之意義是表示偶然性程度之數，而研究其結構就是研究 P 所具有的規則——如 P 之値大的一方較易發生；P 之値有時可以相加，有時可以相乘等。這樣子說明，看似矛盾的定義就可明白了。

再者 P 之値是½時，並不是 2 次中必會發生 1 次的意思。如前所述，P 之値是根據多次試驗的結果而求得之數値，當試驗的次數愈來愈大時

，在這些實驗中會發生的次數也愈來愈接近½。因此機率也可以說是在事先已想妥的平均值！

表(7)抄自 2 項分佈表 $_nC_xP^x(1-P)^{n-x}$

機率½

試行 4 次

發生次數	比　例
0	.0625
1	.2500
2	.3750
3	.2500
4	.0625

剛剛 2 次是37.5％

試行10次

發生次數	比　例
0　10次	.0010
1　9	.0098
2　8	.0439
3　7	.1172
4　6	.2051
5	.2461

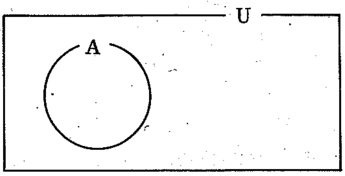
剛剛 5 次是 24.6％

(4)機率可以做爲計算的對象

機率之計算仍根據和的原理與積的原理。但是對學生而言，如何使他們知道在什麼場合適用那個原理，才是問題所在，並非只將複雜的排列與組合的問題引入。而毫無意義地去苦惱學生爲其目標。機率是對個別的 1 個 1 個的事象去想的，如這些事象之間的關聯，可適用和的原理或積的原理，則兩事象的機率之間，便能以求積或和的方法去計算。而這些關聯，像機率論的發展的歷史，在初中的場合，尤應配合學生的經驗，期能使其充分理解。

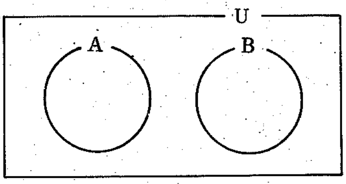
(5)可利用集合去思考：

機率論如從其發展的歷史觀之，可以說是一種經驗的科學。而現代的機率論都是以集合論爲基礎的公設化機率論。比方說：投擲 1 板骰子時，將骰子之各面（1，2，…，6 點）看做是含有



$\phi \subseteqq A \subseteqq U$

$0 \leqq P(A) \leqq 1$

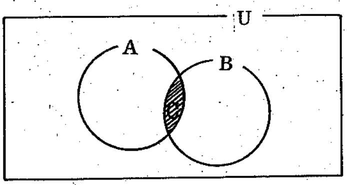


$A \cap B = \phi$

$P(A \cup B)$

$= P(A) +$

$P(B)$

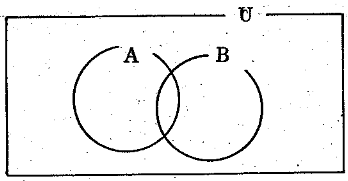


$A \cap B = C$

$P(C)$

$= P(A \cap B)$

$= P(A)P(B)$



$A \cap B = C$

$A \cup B = D$

$P(D)$

$= P(A \cup B)$

$= P(A) + P(B)$

$- P(C)$

集合與機率的用語的對照

集　合	機　率
(1)全體集合　U	(1)標本空間
部份集合　A	事象 A（偶然事象或複合事象）
元素　a	基本事象 a（標本）
(2)集合 A 與 B 不相交　$A \cap B = \phi$	(2)事項 A 與 B 不能同時發生
(3)集合 A 與 B 之交集爲 C　$A \cap B = C$	(3)事項 A 與 B 能同時發生事象 C　$P(C) = P(A)P(B)$
(4) $A \cup B = X$	(4)事象 X 是事象 A 與 B 中至少有一個會發生　$P(X) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
(5)補集合　$\overline{A} = U - A$	(5)事象 A 不能發生　$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
(6)空集合　$A = \phi$	(6)事象 A 絕對不會發生　$P(A) = 0$
(7)全體集合　$A = U$	(7)事象 A 必定會發生　$P(A) = 1$

6 個元素的集合，而將骰子之面的各種出現的情形，以此集合的部份集合去表示之，並以這些部份集合中元素的個數與原來集合元素的各數（即 6 ）之比值作爲各該種情形發生之機率。也就是說用機率函數去想各種出現情形的機率。所以指導學生機率時，應注意到它與集合的關聯，並從這個方向去加以指導。

⑹應如何去解釋統計資料

讓我們來考慮一下作爲統計資料的一些東西，譬如說就以某校某班學生的身高的次數分配表做例子吧！要從這個資料中去調查該班學生身高的變化範圍是很簡單就能做到的，而想從這個資料去判斷該班學生的營養情形就較爲困難了，若是要去判斷全校學生的營養狀況的好壞就更困難了。但是若有熟練於統計理論的專家之幫助與指導，則還是能下一個正確的判斷的。這是因爲他們對統計資料的取捨與判讀，非常達練，能用數學的方法去處理資料之故。也就是說，資料一到他們手裏，無論何時何地都能從同樣的資料中引出同樣的結論來。

研讀統計資料時，因立場的不同，有時會引出相異的解釋，這是因爲不習慣於從數值去判讀統計資料的緣故。但這並不是說只有統計專家才能下正確的判讀，而是說，對於用什麼方式收集而來的資料，在什麼範圍內有什麼危險率，如能弄淸這些，任何人都可以下結論的。所以說，根據母集團、標本以及調查方法，便能從標本去推定母集團的情形。因此這些標本也應受所定目標的約束而去挑選出來。

總之，對學生應先指導如何去收集資料的方法與其意義，然後才去說明所收集資料之涵義。

⑺統計的數值是測定值

統計資料所取的數值都是測定值。我們說某一班身高在 150 公分以上的學生有25人，這個150公分就是經由測定而得出的數值，而人數也是經過計算而得出的，所以25人這個數目也可視爲一測定值。假定該班的人數是42人，則其相對次數爲 $25 \div 42 = 0.595280$，在適當的位數四捨五入可得出0.60。所以先介紹有效數字是必要的（此處二位數除以二位數，所以有效數字通常也常取到 2 位數）。有效數字的位數，學生常喜歡儘量放長，就統計的意義而言，這常是沒有必要的，關於這點，應使其充分了解。

不過對於這個測定值，我們必須愼重處理。我們都曉得電視收視率早已成爲茶前飯後的熱門話題。去年日本的報紙上發表了一條消息，就曾被日本的統計專家幽了一默。該消息說：「某電視台的某一節目的收視率爲 23.5％，比上一個月增加了 1.5％」。毛病就出在這短短報導的後半段，專家們指出：『首先應明瞭作爲調查對象的家庭電視機的件數以及其選樣的方式。標本之數可能只有1000架左右，這與日本全國電視機之總數約4000萬至5000萬架的母集團之數比較，不無太少之嫌。而其選擇標本的方式，雖然可能曾經過一番苦心的籌劃，但似乎仍有偏差之處呢？日本專家指出：如果這個1.5％只是指所調查的1000架的 1.5％，則上個月爲 220 架，這個月變成230架，增加了15架而已。但這個 1.5％若是表示相對次數的話，則5000萬架的 1.5％就是 75 萬架之多了。日本某電視台所要誇示的，其本意或者在此，是耶？非耶？』

⑻應使學生注意資料的背景：

法國的一位統計專家曾經說過，對某一資料之背景是什麼？其調查的目的是什麼？在處理統計問題應先有充分的考慮，他舉例說：「即使是要調查全國農村的勞力，也無需挑起全國農村勞力調查的大招牌，而去向全國好幾百萬農民作調查，就像上次那樣，因作了全面的調查，反而收到與本來的目標相反的結果」。這位專家又強調說：「只要適當地選定 1％左右的標本，對農村環境與勞力的改善，已能達成所預期的目的了」。

指導機率與統計時，不可完全偏重於技能方面，還應將眼光放大到它的背景上，也是很重要的。〔本文摘譯自日本數學教育學會編著之“現代の數學教育②－中學校篇”，譯者現職：國立臺灣師範大學數學系副教授〕