調和平均數

林福來

一、引言

兩個數的算術平均數，早在小學算術中就已經介紹，學生幾乎都知道兩個數的和的一半就是兩數的算術平均數。另外一個幾何平均數，國中數學開始介紹比值的時候，免不了要談比例中項，比例中項也就是幾何平均數。中學數學中，討論數列與級數時，算術平均數及幾何平均數的概念，又分別被引用來導出算術級數及幾何級數。因此，跟一般的高中生聊天，談起算術與幾何平均數，他們都不會覺得陌生，甚至可以馬上告訴我們說"算術平均數大或等於幾何平均數"，這有名的不等式。不過，關於另外的一個平均數"調和平均數"，遇到比較粗心的數學系畢業生，問他"調和平均數是什麼？"他的反應可能有似曾相識的感覺，但不知道是什麼。數學系的同學知道調和級數(或調和數列)但不知道什麼是調和平均數的大概不少。因為一般大一微積分，甚至高中數學，討論數列與級數時，通常都會舉下面這個有名的發散級數——調和級數的例子：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

因此調和級數(或數列)是同學們應該要知道的。教科書中長期地忽略了"調和平均數"的介紹，難怪學生不知道。

介紹調和平均數的意義之前，先以開車速度問題為例，引進其概念：

假設台北到高雄，高速公路距離是 360 公里。有一天，王先生有急事，從台北開車到高雄，每小時平均速度是 120 公里。從高雄回台北時，由於事情已經辦好，王先生以每小時 90 公里的規定速度開回來。請問，王先生南北來回一趟，平均的開車速度多少？

如果把這問題問學生，可能很多人會不假思索就答說平均時速是 105 公里，當這些學生被告知答案是錯的時候，恐怕還會大惑不解呢！105 確實是 90 和 120 的平均數。不過這問題並不只跟來回的速度有關，而且還涉及來回分別花的時間。從台北到高雄，王先生只花了 3 小時就趕到了，回台北則花了 4 小時。因此，正確的答案應該是來回的總里程除以總共花的時間，才是平均速率，即

$$\frac{360\times 2}{3+4}=\frac{720}{7}$$

二、調和平均數

一般而言，設 γ_1 和 γ_2 分別是走總里程 d 的兩種速度，欲求它們的平均速度：先求兩種速度走完全程分別需要的時間：

$$t_1=\frac{d}{\gamma_1}\quad,\quad t_2=\frac{d}{\gamma_2}$$

因此總共所需的時間，$t=t_1+t_2=\frac{d}{\gamma_1}+\frac{d}{\gamma_2}$

$$=d\left(\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}\right)$$

因為平均速度 γ 等於 $\frac{2d}{t}$，因此

$$\gamma=\frac{2d}{t}=\frac{2d}{d\left(\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}\right)}=\frac{2}{\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}}$$

$$\overset{(*)}{=}\frac{2\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}$$

上面這公式就是求兩種速度走相同的距離，它們的平均速度。

觀察等號(*)，我們發覺 γ 等於 γ_1 與 γ_2 的倒數 $1/\gamma_1$ 和 $1/\gamma_2$ 的算術平均數的倒數。γ 這平均數就稱為是 γ_1 和 γ_2 的**調和平均數**。

三、調和平均數的推廣及應用

正如同算術和幾何平均數，分別是從算術數列和幾何數列所導出的概念一樣，利用調和平均數，也可以建立所謂的調和數列。依照調和平均數的定義，一數列如果每一項的倒數所成的數列是一算術數列，就叫做調和數列。換句話說，如果 a，b，c 是一調和數列，那麼 $1/a$，$1/b$，$1/c$ 就是一算術數列，反之亦然。當 $1/b$ 等於 $1/a$ 和 $1/c$ 的算術平均數時，b 就等於 a 和 c 的調和平均數。關於調和數列的運算與討論，一般是先將每一項取倒數，使成算術數列後再處理。例外情形也有，比如討論：

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots\ldots,\frac{1}{n},\ldots\ldots$$

的收斂性時，通常的處理方式是

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{n}+\cdots\cdots=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+$$

$$\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\cdots>1+\frac{1}{2}+$$

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots$$

$$=1+1+1+\cdots\cdots$$

因此得知調和數列 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$ 爲一發散數列。

調和平均數的概念，可以很自然地推廣到 3，4 或 n 個數的調和平均數

$$r,s,t\text{ 的調和平均數}=\frac{3}{\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}}$$

$$=\frac{3rst}{st+rt+rs}$$

$$r,s,t,u\text{ 的調和平均數}=\frac{4}{\frac{1}{r}+\frac{1}{s}+\frac{1}{t}+\frac{1}{u}}$$

$$=\frac{4rstu}{rst+rtu+stu+rsu}$$

r_1，r_2，…，r_n 的調和平均數

$$=\frac{n}{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\cdots+\frac{1}{r_n}}$$

調和平均數的主要應用，就是當基底（如總里程）相同時，不同的比率（如速度）的平均數。除了開車的速度問題外，再舉兩個例子來說明：

1. 設鉛筆每枝 2 元，原子筆每枝 5 元，簽字筆每支 4 元，小華三種筆各買了20元，試問小華所買的筆平均每支多少錢？

答案：$\dfrac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}=60/19$（元）

2. 設棒球王王先生，7 月份的安打數有30支，平均打擊率爲 0.300，8 月份的安打數也有30支，平均打擊率升高至 0.400，試問王先生 7 月和 8 月這兩個月的平均打擊率多少？

註：此題讀者該不難求出答案。

四、幾何意義

1. 梯形中上、下底長的調和平均數等於過梯形兩對角線的交點，平行於底邊而交於兩腰的線段長。

許多代數概念，往往可以用幾何做漂亮的解釋。上面的敍述就是調和中項的一種幾何意義。

令 $ABCD$ 爲一梯形，AD，BC 分別是上、下底，G 是對角線 AC，BD 的交點，EGF 平行於兩底，如圖一所示，欲證 EF 爲 AD 和 BC 的調和平均數。

因爲 $GF\parallel BC$，所以 $\triangle AFG\sim\triangle ABC$ 且 $AF/FG=AB/BC$。同理，因爲 $GF\parallel AD$，所以 $\triangle GBF\sim\triangle DBA$ 且 $BF/FG=$

$AB\ /\ AD$

因此 $\dfrac{AF}{FG}+\dfrac{BF}{FG}=\dfrac{AB}{BC}+\dfrac{AB}{AD}$

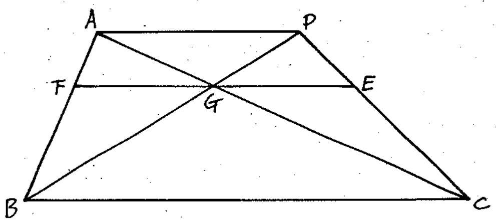
即 $\dfrac{AF+BF}{FG}=\dfrac{AB}{FG}=\dfrac{AB}{BC}+\dfrac{AB}{AD}$

故 $FG=\dfrac{(BC)\cdot(AD)}{BC+AD}$

同法可得 $EG=\dfrac{(BC)\cdot(AD)}{BC+AD}$

因此 $EF=FG+EG=\dfrac{2BC\cdot AD}{BC+AD}$

亦即EF等於BC和AD的調和平均數。



（圖一）

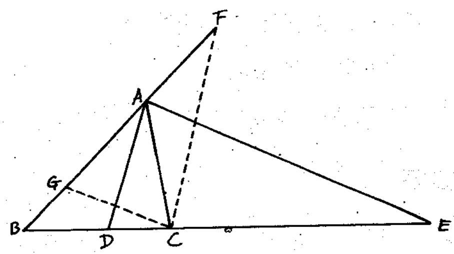
2 調和點列

射影幾何中，調和點列是最基本的概念，調和點列的幾何表示法自也是一個有趣的問題。

$\triangle ABC$中，設AD是$\measuredangle BAC$ 的角平分線，AE是$\measuredangle BAC$ 的外角平分線，D，E都在$\overleftrightarrow{BC}$上。欲證：BD，BC和BE是一調和數列。（如圖二所示）

證明：過C 作$\overline{GC}\mathbin{/\!/}\overline{AE}$，$G$在$\overline{AB}$上，則$\triangle BCG$與$\triangle BEA$相似且$AG=AC$，所以

$$\frac{BE}{CE}=\frac{AB}{AG}=\frac{AB}{AC}$$



（圖二）

同理，過C 作$\overline{CF}\mathbin{/\!/}\overline{AD}$，則$\triangle ABD\sim\triangle FBC$且$AF=AC$，所以

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AF}=\frac{AB}{AC}$$

故得 $\dfrac{BE}{CE}=\dfrac{BD}{CD}$ 或 $\dfrac{CD}{CE}=\dfrac{BD}{BE}$

（註：此時，B，D，C，E稱做是一調和點列）

設$\overleftrightarrow{BDCE}$在一數線上，$B$點座標爲 0，$D$，$C$，$E$ 的座標分別爲r，s，t 即$BD=r$，$BC=s$，$BE=t$，故所欲證的是r，s，t成一調和數列。

因爲 $\dfrac{CD}{CE}=\dfrac{BD}{BE}$ 所以 $\dfrac{BC-BD}{BE-BC}=\dfrac{BD}{BE}$

以座標代入，即得 $\dfrac{s-r}{t-s}=\dfrac{r}{t}$

亦即$ts-tr=rt-rs$，兩邊同除以rst，得

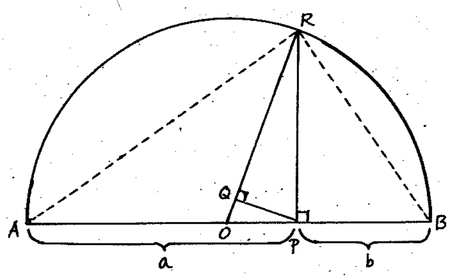
$\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{t}$，因此 $\dfrac{1}{t}$，$\dfrac{1}{s}$，$\dfrac{1}{r}$

是一算術數列。所以r，s，t是一調和數列。

五、算術幾何與調和平均數的大小關係

1 利用幾何圖形比較

1·1. 半圓—直角三角形比較法：



（圖三）

已知a，b兩個正數

在圖 3 中，$\overparen{ARB}$ 是一半圓，O爲圓心，AP和BP分別爲兩已知數a和b，且$\overline{RP}\perp\overline{AB}$，$\overline{PQ}\perp\overline{RO}$，則$a$和$b$的算術平均數（A.M）$=$

$$\frac{1}{2}(a+b)=\frac{1}{2}(AP+BP)=\frac{1}{2}AB$$

$$=RO\text{（半徑）}$$

因爲$\triangle BPR\sim\triangle RPA$，所以$PB\ /\ PR=PR\ /\ AP$，

即 $PR^2 = AP \cdot PB$，$PR = \sqrt{AP \cdot PB}$

$$= \sqrt{a \cdot b}$$

故 a 和 b 的幾何平均數（G.M）$= PR$.

又因爲 $\triangle RPO \sim \triangle RQP$，所以 $\dfrac{RO}{PR} = \dfrac{PR}{RQ}$，

$RQ = \dfrac{(PR)^2}{RO}$，以 $(PR)^2 = a \cdot b$ 及 $RO = \dfrac{1}{2}(AB) = \dfrac{1}{2}(a+b)$ 代入，即得

$$RQ = \frac{ab}{\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}$$

故 a 與 b 的調和平均數（H，M）=RQ

由於直角三角形中斜邊最長，所以 $RO > PR > RS$　當 $a=b$ 時，P 與 O 重合，故 $RO = PR = RS$　因此，對任意的兩個數 a 和 b，恆可得

A.M≥G.M.≥H.M.

且等號成立的充要條件是 $a=b$

1·2. 梯形比較法

給定 a 和 b 兩個正數，造一梯形 $ABCD$，（如圖 4）使其上、下底長 $\overline{AD}$ 和 $\overline{BC}$ 分別等於 a 和 b。G 是對角線 $\overline{AC}$，$\overline{BD}$ 的交點，$\overline{EGF} \parallel \overline{AD}$，$M$，$N$ 分別是 $\overline{AB}$，$\overline{CD}$ 的中點。$\overline{PR}$ 平行於底邊，且使梯形 $ADRP \sim$ 梯形 $PRCB$（註：讀者能想出 $\overline{PR}$ 的作法嗎？）

故得　a 和 b 的 A.M＝MN

G.M＝PR

H.M＝EF

因此　A.M. ＞ G.M. ＞H.M.

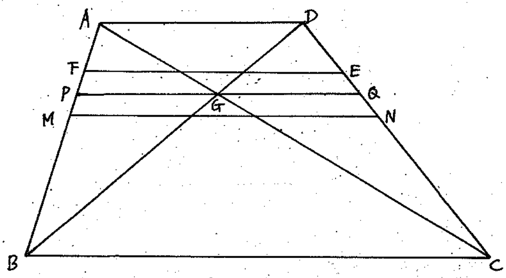
又當 $ABCD$ 爲矩形時，$\overline{MN}$，$\overline{PR}$，$\overline{EF}$ 重合，故此時

A.M. ＝ G.M. ＝H.M.

一般而言，對 a，b 兩正數，恆得

A.M. ≥G.M. ≥H.M

上面討論的是分別利用兩種幾何圖形來比較兩個數的算術，幾何與調和平均數的大小關係。如果對任意 n 個正數的算術，幾何與調和平均數的大小，幾何圖形就無能爲力了。這個時候，代數運算必得粉墨登場。



（圖四）

2　代數比較

設 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 爲 n 個正數，$A.M.$，$G.M.$ 及 $H.M.$ 分別代表他們的算術，幾何及調和平均數。

(1)高中數學中，已證明了

$$A.M. \geq G.M.$$

(2)欲證：$G.M \geq H.M.$

設 b 是一任意的整數，考慮 n 個正數

$$a_1^b,\ a_2^b,\ \cdots,\ a_n^b$$

由(1)可得　$\dfrac{a_1^b + a_2^b + \cdots + a_n^b}{n} \geq \sqrt[n]{a_1^b a_2^b \cdots a_n^b}$

當 $1/b < 0$ 時，可導出

$$\left(\sqrt[n]{a_1^b a_2^b \cdots a_n^b}\right)^{\frac{1}{b}} \geq \left(\frac{a_1^b + a_2^b + \cdots + a_n^b}{n}\right)^{\frac{1}{b}}$$

取 $b = -1$。代入上式，則

$$\left(\sqrt[n]{a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_n^{-1}}\right)^{-1} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

$$\geq \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}{n}\right)^{-1}$$

因此　$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$

亦即　G.M. ≥H.M.

綜合(1)，(2)即得：對任意 n 個正數，恆有

A.M. ≥G.M. ≥H.M.

且等號成立的充要條件爲 n 個正數都相等。

六、後言

比較了調和平均數與另外兩個常用的算術與幾何平均數的大小關係，並介紹調和平均數的幾

（下接 7 頁）

物體作用相同的力。如此，解決問題的第一個步驟，已經完成了。

第二個步驟是要找出一個量，對於受到同一個力的一切物體，這個量必須保持不變。這個量只能在實驗中找到。要設計一個實驗，讓變了形的彈簧使一個物體作等加速度直線運動，這是非常困難的。因爲我們必須讓彈簧作等加速度運動，才能達到這個效果。然而，假使利用圓周運動的物體，則加速度的測定就容易多了。圖四所示的是適合這個目的的簡單裝置。圖中，1表示能

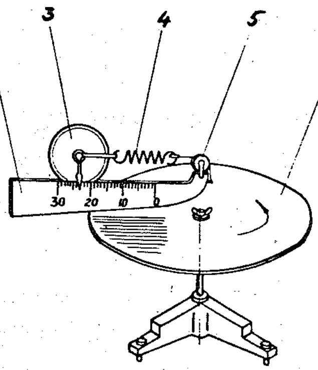


圖　四

在水平面上自由轉動的圓盤；3是沿著軌道2滾動的輪子；4是連結輪子與支架5的軟彈簧，而支架固定在軌道上。另外必要質量200克與／或500克的兩個輪子。首先分別把不同的輪子繫在彈簧，用手轉動圓盤，就能使彈簧每次保持相同的變形量（伸長）。在此情形之下，輪子分別以 a_1 與 a_2 的加速度作圓周運動（加速度可由輪子的角速度 ω 與圓形軌道的半徑 r 求得）。物體（輪子）在受到彈簧相同的力（相同的伸長）作用之下，獲得加速度 a_1 與 a_2 。由此實驗得知

$$a_1/a_2 = m_2/m_1 \text{ 或 } m_1a_1 = m_2a_2$$

如此，我們終於找到，在同一個力的作用之下，被加速的物體所得的共同量。因此，我們獲得一個結論：ma 就是力的效應之量度：

$$F = ma$$

我們在每一次實驗中觀察到，作用在輪子的力，其效應總是沿著彈簧軸的方向，輪子的向心加速度也是始終沿著彈簧軸的方向（沿徑加速度）。因此，我們可以把方程式寫成大家最熟悉的形式：$\vec{F} = m\vec{a}$，這就是牛頓第二定律最常見的形式。

其次，又能進一步證明，質量與加速度的乘積不但能夠用以測量彈力，而且能夠用以測量他種力（例如，重力或摩擦力）。就以重力爲例，我們可以採用下列方法。首先，在鉛直彈簧下，懸掛一個物體。因爲這物體的加速度等於零，所以我們認爲彈簧的張力與重力的大小相等，而其方向相反。

$$\vec{F}(\text{彈力}) = -\vec{F}(\text{重力})$$

這時，彈簧的張力所產生的加速度等於重力所產生的加速度（加速度的方向當然是相反），$\vec{a} = -\vec{g}$，因爲在前面已經證明過，F（彈力）$= ma$，所以

$$\vec{F}(\text{彈力}) = -m\vec{g}$$

又因　$\vec{F}(\text{重力}) = -\vec{F}(\text{彈力})$

故　　$\vec{F}(\text{重力}) = m\vec{g}$

由上述牛頓第二定律的介紹方法，也很容易建立第三定律，在物體交互作用的觀察中，已知 $ma_1 = ma_2$ 又在前面已經證明過，ma 這乘積就是力的量度（$F = ma$），所以兩個物體互相作用的力是大小相等而方向相反。

如此，這項實驗的結果，同時可以獲得牛頓第二及第三定律。

〔取材自歐洲科學敎育期刊1979年第1卷，作者現職：國立臺灣師範大學物理系敎授〕

（上接48頁，調和平均數）

何意義之後，對於調和平均數現在聽起來應該覺得親切多了。這個比較小以致於幾乎被我們所忽視，遺忘了的平均數，讀者諸君看過本文之後，希望需要時，它能湧現於我們的腦際，再度扮演它的解題工具的身分。

〔作者現職：國立臺灣師範大學數學系副敎授〕