

青少年世界中的數學(三)

Paul Rosenbloom 著

黃敏晃 譯

三、基本數學概念的形成

這裏所要談論的問題，甚至對大人而言，也絕不是件單純的事情，但經驗告訴我們，八歲以上的小孩就有能力，同時也喜歡學習這些東西。

對人類所處的物理世界的瞭解，要牽涉到數量、空間與時間等概念。由於這些是如此基本的概念，而且深入每個大人的骨髓，以至我們常誤以為它們是非常簡單的概念，實際上大大不然。

大部分的大人早已忘記他們很小的時候，當他們還未擁有這些概念時的情形，他們是如何獲得這些概念的？同時他們也無法像基礎物理學家如愛因斯坦之流那樣，能理解到這些概念是相當深，相當困難的——這些基礎物理學家對這些概念的此種理解，其實同小孩子對這些概念的看法一樣。

我們當然可以想像到，普通公民的一般教育，其中一部分的目的，是在教育將來的父母——他們是將來每個小孩的第一個，同時也是最重要的教師。如此看來，獲得上述的這些概念時，所牽涉到的數學的，以及心理學上的理解，應該是國民教育的一部分才對。但是，即使在目前，這些內容甚至不在培養各級國民教師資的訓練課程內，可見問題的嚴重性。

基於以上的討論，我們有必要對「人如何獲得這些基本概念」，作一番比較徹底的瞭解，才能有效的改進我們的國民教育。由以下的實驗，我們多少可以看出，小孩的数量概念是如何發展出來的。

一個在幼稚園裏常玩的遊戲是，讓一群五歲或六歲的小孩圍坐成一圈，椅子數與小孩數相等，所以每個小孩都有張椅子坐，而每張椅子上也都坐有一個小孩。遊戲開始時小孩由椅子上站

起來，隨著音樂載歌載舞，沿著椅子圍成的圓圈移動。但在音樂停止時，每個小孩都得找張椅子坐下來，而且不得與別人同坐一椅。經常發生的現象是，當音樂一停止，小孩都慌裏慌張的找椅子，惟恐沒得坐，甚至於發生兩個小孩為搶同一張椅子而爭吵的現象。

這些小孩知不知道，椅子與小孩是一樣多的事實呢？在音樂響起之前，他們是知道這回事的，因為他們實際上透過了一對一的對應（one to one correspondence）方式，顯示了這個事實。實驗者為清楚起見，可在音樂開始前，問問這些小孩，甚至在他們不知道的情況下，告訴他們此事實。即使如此，實驗也顯示了同一結果：小孩一樣慌張的找椅子，兩人為搶一張椅子而爭吵。問題在於，當小孩隨著音樂移動其位置，一對一對應不是一目了然的情況下，他們就再不能確定這回事了。

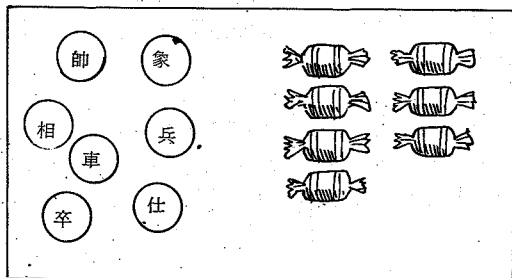
更簡單的實驗方法是利用碗與湯匙：叫一個五或六歲的小孩，用一對一的對應方式把碗與湯匙配對（例如把湯匙放入碗中），顯示碗與湯匙的數目相等，然後叫他們把碗放一堆，湯匙另放一堆，再問他這堆碗與這堆湯匙是否一樣多？小孩的答案常是「不知道」。

一般說來，當兩堆物件有一對一的對應時，這兩堆物件的數目是一樣的，而且不管如何移動物件的位置（當然移動得有限制，例如不脫離桌面），此數目不變。後面的事實，套用術語來說就是：一堆物件的數目，是在某種限制內的物理變換下的不變性或不變量（invariant under physical transformation）。上述的兩個實驗顯示，許多五或六歲的小孩並不清楚的體會到這回事。在這種情況下，教他們數字，數的基本運算，與大小比較等教材，顯然是對牛談琴，白費

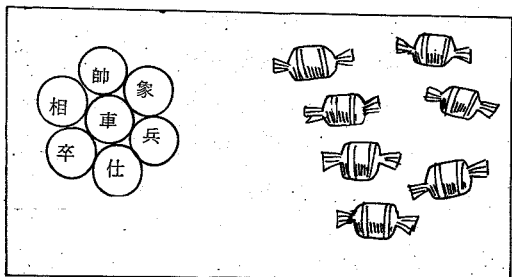
〔註〕原著者為Paul Rosenbloom，第24、25期誤為Raul Rosenbloom，特予更正。

心機。

每個人都可用自己的五或六歲的小孩作另一個實驗如下：拿7個糖果與7個棋子，叫小孩把它們一對一的配起對，然後把糖果聚成一堆，讓棋子散佈在桌上如下圖一，問他棋子多還是糖果多？答案常是棋子多而糖果少。再把棋子聚成一堆，糖果散布桌面上如下圖二，問他那樣東西多？這次的答案則常是糖果多而棋子少了！



圖一



圖二

作父母的並不需要感到憂慮，認為自己的小孩沒有數學頭腦。瑞士教育心理學家皮亞傑（Jean Piaget）在四十年的臨床研究中，發展出一套有關兒童認知過程的理論。按照這套理論，每個小孩的認知過程都得經過好些階段，要達到清楚的意識到數量在物理變換下不變的事實（皮氏使用「數量的不滅性或保存性」，英文為 Conservation of numbers and quantities——的術語來描述這件事），大部分的小孩要七歲以後。對此階段之前的小孩，抽象的數字如6、7等只

是空洞的名詞，更遑論 $3 + 4 = 7$ ，或 $6 < 7$ 等抽象式子了。

按照皮氏的理論，基本數量概念的心理形成，是基於兒童對於某種數學關係的不變性的覺察。換句話說，即兩堆物件能作一對一對應的關係，不因這些物件所擺置的方式不同而有所改變的事實。這種概念的理解，可以借一些有目的的遊戲加以促成〔註1〕，例如

黑白兩堆圍棋子（每堆數目不宜太大，如都不超過8），兩小孩輪流拿棋子，每次至少得拿一個，而且可拿取同顏色棋子兩個以上（數目不加限制），但不得同時拿取不同顏色的棋子，拿到最後一個棋子的人輸（譯者註：這是遊戲Nim的一種簡化形。關於Nim，請參看科學月刊民國六十四年十月號，趣味數學談話之六，一個名為「拈」的遊戲——李宗元、黃敏晃寫）

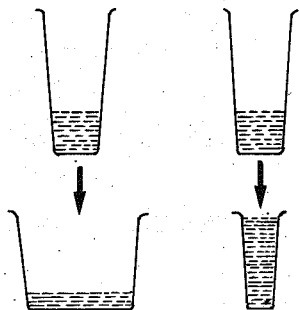
這個遊戲輸贏的關鍵，在於一對一對應的運用。譬如說，若以6白8黑兩堆棋子開始，甲生先拿。若甲生拿7個黑棋，乙生拿3個白棋，甲生是否看得出來他只要把剩下的白子拿光就贏了？當然，乙生是下了一著臭棋，但無可否認的，甲生的第一著棋也是臭棋。因為只要把兩堆棋子拿成同數目後，次一個拿的人就輸定了：利用一對一對應的原理，你拿多少個同色的棋子，我就拿多少個另一色的棋子。直到兩色棋子都只剩兩個時，你若只拿一個，我就把另一色的兩個棋子都拿光，但若把某色的兩個棋子都拿光，我就把另一色的兩個棋子中的一個拿掉，不管如何你都得拿最後一個（參看一個名為「拈」的遊戲）。

我們也許不能期望小孩一開始就發現這個贏棋的致勝要訣，但經過一段時間的遊玩練習後，他們一定能弄清楚的（小孩的好勝心在教學中應善加利用）。如此，他們就能學到一對一的對應

〔註1〕 譯者註：近年來美國數學教育界，有許多人致力於提早兒童成熟的研究，例如使兒童早期獲得數量不滅性的概念。他們的研究報告指出，這件事是可能的。本文著者 Paul Rosenbloom 即其中佼佼者。但皮氏嗤之以鼻，認為這是美國人沒耐心，辦事講究速成，只求效率不問品質的淺薄的功利哲學的表現。他一再聲明這對兒童並無益處，教育應慢慢來，水到自然渠成，不能揠苗助長。

了。

皮氏的另一個有名的實驗也值得在此一提：在兩個同形狀同大小的杯中，注入一樣多的液體（如水，但為提高兒童的興趣，可使用果汁等兒童喜歡的飲料）。問出兒童知道兩杯一樣多時，再當著他的面，把這兩杯液體倒入兩個一肥一瘦的兩個杯子（如下圖），然後問他那杯的液體（在問句中最好不用「液體」這樣難的名詞，應使用如水、果汁、汽水等他知道的名詞）多？



圖三

皮氏的研究報告指出，連八歲的小孩中也有許多人弄不清楚，液量與裝液體的容器的外形及大小是沒有關係的（當然，若裝滿容器，則液量變成容器的容量，此時就大有關係了！）

皮氏設計的這個實驗，為的是測驗兒童是否具有另一類型的數量不減性的能力。注意到，此處關鍵性的要點，仍然是在某種物理性的變換下（指改變裝液體的容器的外形，因此改變了液體的位置與外觀形狀）的不變性或不變量。

由此看來，對數量的基本概念的理解，與某種類型的物理變換群有密切而不可分割的關係；換句話說，只有透過在某種物理變換群下的不變性或不變量的覺察，才能表現出學生是否真正的理解這些基本概念。

這樣的想法也是理解空間、時間以及物理宇宙的基礎。譬如說，正方體、球體、三角形等幾

何圖形的性質，並不因這些圖形在臺北或屏東而生差異，也不會因為昨天、今天或明天而有不同。所以，二千年前古希臘的歐幾里得幾何原理至今還奉為圭臬；我國南北朝時期的大數學家祖沖之父子所測得的圓周率近似值（介於3.1415926與3.1415927之間），到現在還能適用。同理，啟蒙時期的物理學家如伽利略之流所作的物理實驗，我們能在此時此地重作，而得到相同的結果。換句話說，幾何定理與物理定律，是在位置與時間的變換群下的不變性質或不變量。

十九世紀的德國大幾何學家克萊恩（Felix Klein），於西元一八七二年在接受德國爾朗哥大學數學系講座教授〔註2〕職位的就任演講中，綜合了當時已發展出來的各種幾何學，提出了有名的爾朗哥計畫（Erlanger Program），指出幾何研究的方向。這個計畫在數學上的重要性，可用我國中央研究院數學院士，國際聞名的微分幾何學家陳省身先生的老師，德國的名微分幾何學家布拉斯基（Blaschke）的一句話〔註3〕來說明：「我一生的數學研究工作，就是把爾朗哥計畫的精神應用到微分幾何學上。」

爾朗哥計畫的要點，是給予整個幾何學一種新的看法，甚至可以說是給幾何學重新下了定義，克氏說：「幾何學就是研究圖形在某種幾何變換群下的不變性或不變量的一門學問。」這句話已經變成了數學界的名言。

克氏認為，人類對空間的最佳理解，在於對空間對稱性質等不變性或不變量的覺察，而用以考查不變性或不變量的幾何變換群中，還包含了時間的變換在內。這個內容到西元一九〇五年愛因斯坦的狹義相對論發表後，才得到充分的發揮。

狹義相對論的主要論點可以簡述如下：你我兩人同時觀察某事件，譬如說一叢野火。你我兩

〔註2〕 譯者註：當時德國大學每系只有一個講座教授，都聘有名的學者擔任（克氏當年才23歲），而且就職時得發表演講，說明他對數學的哲學觀點，順便提到他將如何領導研究工作等。

〔註3〕 譯者註：參看Mathematical Intelligencer, vol 0, 1977年，Coxeter的文章「爾朗哥計畫百年回顧」。

人各有自己的觀察架構 (frame of reference)，意即我們各帶了自己的度量尺度，方向羅盤以及測時間的鐘錶。假定我是站在路邊觀察，而你則坐在以高速率開過的車上觀察，並且各自以自己的立場來描述這叢野火——何時何地發生了什麼事。從我的立場轉到你的立場，就會把我的觀察描述變成你的觀察描述。但這叢野火的本質才是具有真正科學重要性的事物，這些就應該是不管站在那種立場，使用怎樣的觀察架構來度量，都能保持不變的東西。這個基本的觀點，現在已被物理學界廣泛的接受為物理學裏最基礎的想法。

這裏我們看到，從數學、物理以及教育心理學這三方面的基本觀點，都匯聚在一個共同的焦點上：每個基本概念都與一群變換相關連，只有

覺察到在這群變換下的不變性或不變量，這些基本概念才算清楚。

實驗的結果顯示，小孩只有在能預測「還原 (undoing 或 inverting) 一個變換 (但不實際動手去逆轉此變換) 的結果」的情況下，他才算真正獲得了一個基本概念。所以，讓兒童早期有機會來體驗到這類想法，是教育裏很重要的一件事情。我們應該讓學生實際動手，執行許多不同類型的變換，並問他那些性質變了，那些沒有變。進一步更可要求他在執行變換前作預測，那些性質會起變化，那些不會，還得要求他以實驗與觀察來證實他的預測。這樣，基本的數學概念才能形成。

[譯者現職：國立臺灣大學數學系教授]

(上接 49 頁，六十七學年度國民中學自然科學、數學課程實驗研究計畫)

析一流程圖之運用」，分成發現與探討式教學法、科學過程技能與教學活動、科學教育目標分類、系統管理與科學教學過程及探討的教學過程編製要點等項目詳細說明，並將第二冊教材所試編成的流程圖提供各實驗教師研討，使大家又獲得許多教學上的知識及技巧。

教師研習會在二月十日中午總檢討會後，圓滿結束，使每一位實驗教師對下學期教學都充滿興趣及信心。

三、數學實驗教師寒假研習會簡報

「國民中學數學課程實驗研究計畫」六十七學年度實驗教師寒假研習會於二月五日至十日在師大科教中心與自然科學課程研討會同時舉行，共有北、中、南、東部十所數學實驗學校廿位實驗教師參加。

此次研討會之工作重點是介紹第二冊數學實驗教材的內容及精神，同時並按照上學期各實驗教師教學的實際經驗修訂第一冊教材。

首先由陳銘德、陳冒海、陳昭地教授介紹第

二冊教材之內容，此冊教材內容包括：二元一次聯立方程式，坐標系與二元一次聯立方程式的圖解，平行，比例、相似與函數，面積與乘法公式，其精神是注重實用性的教材，提高學生的學習興趣，減輕學生的負擔，經由此介紹使各實驗教師都能了解教材的特色及精神，實際教學時才能充分表現出此教材之精華。接著由各教授介紹教學模式及教具，使老師們知道在教學活動時如何引發學生興趣，如何引導學生發現問題並解決問題，如何將所學的歸納及應用，同時演習此教材中相關教具之製作及使用。

每日上午由教授指導各實驗教師研習新教材，並由每一位教師上台試教，使每一位教師對新教材都有充分的認識及正確的教學方法。下午安排上學期教材之修訂工作，每位教師按實際教學的體會提出修訂意見，將疑難處提出討論，並增加一些欠缺內容，經修訂後的教材更為完全及實際。

研習會於十日中午總檢討會後圓滿結束。