e 與 π 都是無理數

李恭晴

一、引　言

早在歐幾里德時代的古希臘哲學家們就已經知道有無理數存在。我們甚至有理由相信像亞里士多德等人就已經概略的知道如何證明 $\sqrt{2}$ 爲無理數，這個證明方法流傳了兩千多年，到現在我們在學校上課時還常常拿來證明給學生看。$\sqrt{2}$ 確實是一個典型的無理數的例子。除了 $\sqrt{2}$ 這個無理數之外，諸如 $\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[5]{7}$，$2+\sqrt{3}$，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{4-2\sqrt{5}}$，…等等的根式，以及 $\log_2 5$，$\log_5 7$，……等等的對數，也都是無理數，它們的證明與 $\sqrt{2}$ 是無理數的證明都很相像。在這裏我們不想將它們一一列出。除了以上所舉的各種型式的無理數之外，還有很多其他的無理數，其中我們較爲熟悉的可能就是自然對數的底數 e 以及圓周率 π 這兩個了。本文主要的目的就是要利用一些簡易的微積分以證明 e 與 π 都是無理數。

二、e 是無理數

自然對數的底數 e 定義爲

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

它大約等於 2.71828……，這個數具有一個特殊的性質：即，以 e 爲底的指數函數 e^x，它的導函數仍然是 e^x 本身。以符號表示，即爲

$$\frac{d}{dx}e^x=e^x$$

這個性質在一般的微積分書上都可以看到，這裏我們不加以證明。利用這個性質我們可以將 e^x 展開爲如下的邁克勞林（Maclaurin）級數：

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots,$$

以 $x=1$ 代入上式，即得

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\qquad(0!=1)$$

這個等式也可以視爲是 e 的定義。

現在我們證明 e 爲無理數。假設 e 爲有理數，則 e 可以寫成 $e=\frac{k}{m}$ 之形式，其中 m 與 k 都是自然數，且 m 與 k 互質，由於

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n!}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

兩邊同乘以 $m!$，得

$$e\cdot m!=\sum_{n=0}^{m}\frac{m!}{n!}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{m!}{n!}$$

因爲我們假設 $e=\frac{k}{m}$，所以上列等式的左邊是一個整數，且等式右邊第一個和的各項也都是整數，所以等式右邊第二個和

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{m!}{n!}$$

也必定是一個整數。但是，從另一方面看

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{m!}{n!}=\frac{m!}{(m+1)!}+\frac{m!}{(m+2)!}+\frac{m!}{(m+3)!}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{m+1}\left\{1+\frac{1}{m+2}+\frac{1}{(m+2)(m+3)}+\cdots\cdots\right\}$$

$$\leq\frac{1}{m+1}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\frac{e-1}{m+1}<1\ (\text{因爲}\ 2<e<3,\ m\geq1)$$

又因爲

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{m!}{n!}$$

的每一項都大於 0，所以

$$0 < \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{m!}{n!} < 1$$

由於 0 與 1 之間沒有整數存在，所以我們得到一個矛盾的結果。所以 e 不是有理數，它是一個無理數。

三、π 是無理數

要證明 π 是無理數，首先我們復習微積分中的一個簡單的關係：若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 都是 x 的函數，且可微分 k 次。令 $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ 且以上標表示各函數的各階導函數，則有

$$h^{(1)}(x)=f^{(0)}(x)g^{(1)}(x)+f^{(1)}(x)g^{(0)}(x)$$

$$h^{(2)}(x)=f^{(0)}(x)g^{(2)}(x)+2f^{(1)}(x)g^{(1)}(x)+f^{(2)}(x)g^{(0)}(x)$$

$$\vdots$$

$$h^{(k)}(x)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(i)}(x)g^{(k-i)}(x)$$

這個公式和二項式定理的公式

$$(a+b)^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^i b^{k-i}$$

很相像。

現在假設 π 爲有理數，令 $\pi=\frac{a}{b}$，其中 a 與 b 爲互質的兩個自然數。令

$$h(x)=\frac{1}{n!}x^n(a-bx)^n$$

由上列微分的公式可知

$$h^{(k)}(x)=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(i)}(x)g^{(k-i)}(x)$$

其中

$$f(x)=x^n \text{ 且 } g(x)=(a-bx)^n$$

我們注意到，當 $i>n$ 時，$f^{(i)}(x)$ 恒等於 0，而當 $i<n$ 時，$f^{(i)}(o)=0$。換句話說，只有當 $i=n$ 時 $f^{(i)}(o)$ 才不等於 0，它等於

$$f^{(m)}(o)=n!$$

同樣地，我們也不難發現

$$g^{(i)}(\pi)=\begin{cases}0\text{，當 } i\neq n \text{ 時成立}\\(-b)^n\cdot n!\text{，當 } i=n \text{ 時成立}\end{cases}$$

由此可知，當 $0\leq k<n$ 時

$$h^{(k)}(0)=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(i)}(0)g^{(k-i)}(0)$$

$$=0$$

（因爲 $i\leq k<n$，所以上式中每一個 $f^{(i)}(0)=0$）

當 $n\leq k\leq 2n$ 時

$$h^{(k)}(0)=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(i)}(0)g^{(k-i)}(0)$$

$$=\frac{1}{n!}\binom{k}{n}f^{(n)}(0)g^{(k-n)}(0)$$

$$=\binom{k}{n}g^{(k-n)}(0) \quad \text{爲一個整數}$$

當 $k>2n$ 時，

$h^{(k)}(0)=0$（因爲 $h(x)$ 的次數只有 $2n$）

總之，對於所有的整數 $k\geq 0$，

$h^{(k)}(0)$ 恒爲整數。

同樣的道理，當 $0\leq k<n$ 時

$$h^{(k)}(\pi)=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(i)}(\pi)g^{(k-i)}(\pi)$$

$$=0$$

（因爲 $k-i\leq k<n$，所以上式中每一個 $g^{(k-i)}(\pi)=0$）

當 $n\leq k\leq 2n$ 時

$$h^{(k)}(\pi)=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(i)}(\pi)g^{(k-i)}(\pi)$$

$$=\frac{1}{n!}\binom{k}{k-n}f^{(k-n)}(\pi)g^{(n)}(\pi)$$

$$=\binom{k}{k-n}(-b)^n f^{(k-n)}(\pi)$$

爲一個整數

當 $k > 2n$ 時， $h^{(k)}(\pi)=0$

所以，對於所有的整數 $k \geq 0$，

$h^{(k)}(\pi)$ 也恆為整數

現在我們令

$$H(x)=h(x)-h^{(2)}(x)+h^{(4)}(x)-\cdots+(-1)^n h^{(2n)}(x)$$

則由上面之討論知$H(0)$與$H(\pi)$都是整數。又因為

$$H''(x)=h^{(2)}(x)-h^{(4)}(x)+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}h^{(2n)}(x)$$

所以 $H''(x)+H(x)=h(x)$

由此得 $\dfrac{d}{dx}\{H'(x)\sin x-H(x)\cos x\}$

$$=\{H''(x)+H(x)\}\sin x=h(x)\sin x$$

所以 $$\int_0^\pi h(x)\sin x\,dx=H'(x)\sin x-H(x)\cos x\Big|_0^\pi=H(\pi)+H(0)$$

它是一個整數。

另一方面，當 n 相當大時，對於 $0<x<\pi$ 之所有的 x，恆有

$$0<h(x)\sin x=\frac{1}{n!}x^n(a-bx)^n\sin x\leq\frac{\pi^n\cdot a^n}{n!}<\frac{1}{\pi}$$

上列最後一個不等式是因為

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi^n a^n}{n!}=0$$

將此不等式各項積分，得

$$0<\int_0^\pi h(x)\sin x\,dx<\int_0^\pi\frac{1}{\pi}dx=1$$

此與上列所說的 $\int_0^\pi h(x)\sin x\,dx$ 為一個整數互相矛盾，所以π不是有理數，它是一個無理數。

四、總　語

在證明 e 是無理數時，我們主要的是利用 e 在微積分上的一個性質：$\dfrac{d}{dx}e^x=e^x$，將 e 展開成 $e=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$。然後證明它不可能寫成分數 $\dfrac{k}{m}$的形式。而在證明 π 為無理數時，我們主要的是應用 $\sin\pi=0$，$\cos\pi=-1$且當 $0<x<\pi$ 時 $\sin x>0$ 等性質。在證明了 e 與 π 都是無理數之後，我們就可以很肯定的說：e 與 π 寫成小數時都是不循環的無限小數。

〔作者現職：國立臺灣師範大學數學研究所所長〕

（上接46頁，科學實驗室）

⑵移動20分鐘後有紅色與紫色帶之重疊。

10.探討問題：

⑴由實驗之結果，你認為硝酸鉀溶解後，能解離為兩種不同之粒子嗎？

⑵鉀離子帶那一種電荷？硝酸根粒子帶那一種電荷？為什麼？

⑶電解質溶液何以能導電？

⑷什麼力量使正、負離子結合在一起？

11.參考資料：

⑴玻璃管上之氣體溢出口的大小並無限制，只要向外張開即可。

⑵含電解質之凍膠的配置方法：

於 250 公撮燒杯中放入 100 公撮蒸餾水，然後加入約 5 公克硝酸鉀。放在鐵架上以本生燈加熱至沸騰。再加約 3 克的凍膠粉末並攪拌均勻，使用小火以免燒焦。當全部凍膠都溶解完畢，再加入廣用指示劑使溶液帶顏色。

⑶其他可供試驗之電解質：$CuSO_4$，$NaOH$，$NaCl$，$KMnO_4$，$K_2Cr_2O_7$，K_2SO_4等。

12.本實驗活動一班二十五組學生所需材料費：約需 40元。（只做 KNO_3 電解質時）

〔本實驗由國立臺灣師範大學化學系講師黃寶鈿提供〕