青少年世界中的數學(二)

Raul Rosenbloom 著　　黃敏晃 譯

二、理解我們所生活的世界

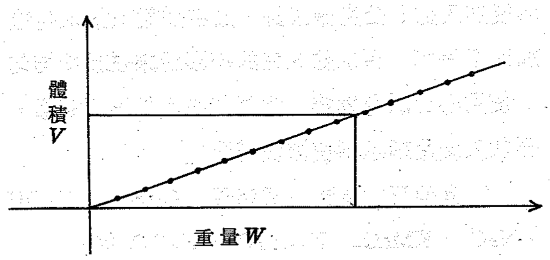
為什麼小孩會想要學數學呢？我想主要的理由是，他們有很強烈的慾望，想瞭解他們身邊的世界到底是怎麼個樣子。這種瞭解會使他感到有力量，感到他們能作他們以前不能作的許多事情。這對他們有強烈的感情衝擊，能使他們產生自信心。這種自信心的建立，經常是由許多大人認為理所當然的小事情所產生的，所以大人常無法理解這些小事情的效果。當我四歲的女兒第一次算出，她與我兩個人合起來共有

（2隻手）＋（2隻手）＝（4隻手）

（2條腿）＋（2條腿）＝（4條腿）

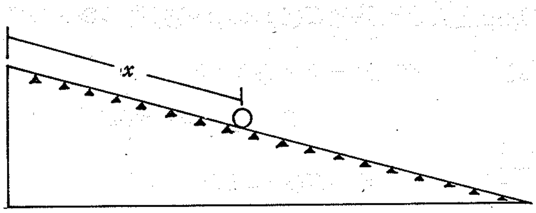
時，她高興的跳了起來，而後的幾天，她除了算眼睛、耳朵、手指頭之外，什麼都不玩。

數學是小孩理解他周圍環境的基本工具，對不同年齡的小孩，數學能幫忙的程度也不同。一個國中學生可以量出不同重量的鐵塊，並將它們逐次放入裝著水，劃著刻度的直圓柱形容器，由水面升高的程度測出鐵塊的體積。他可以進一步把各鐵塊的重量與體積的關係，在坐標平面上表示出來，如下圖：



他會發現這些點都在同一直線上。當他把這條直線畫出來後，他只要量出鐵塊的體積或重量中的一項，他就能預測另一項。

這個學生可以重覆伽利略的實驗，把一個玻璃珠滾下一個光滑的斜坡，如下圖



把玻璃珠所滾的距離與時間量出來（ t 秒內滾了 x 公分），記錄成下表的形式：

時間 t（秒）	距離 x（公分）
0	0
1	2
2	4
3	9
4	16
⋮	⋮

他可以就這些觀察的結果，作簡單的數學分析：頭一秒鐘內玻璃珠滾了1公分（這段時間內的平均速度為每秒1公分），第二秒鐘內滾了3公分（此秒內的平均速度為每秒3公分），第三秒鐘內滾了5公分（平均速度為每秒5公分）等等。由此，他不難看出，每秒內速度的變化率是一樣的。

$3-1=2$，$5-3=2$，$7-5=2$，…。

利用這些簡單的計算，記錄如下表，他重新發現了伽利略的老結果，即加速度是一個常數。

時間 t（秒）	距離 x（公分）	速度 v（公分/秒）	加速度 a（公分/秒²）
0	0	$1-0=1$	$3-1=2$
1	1	$4-1=3$	$5-3=2$
2	4	$9-4=5$	$7-5=2$
3	9	$16-9=7$	⋮
4	16	⋮	
⋮	⋮		

他可以作許多類似這樣的實驗，利用不同的初速度，甚至於傾斜度不同的斜坡。只要他肯對這些記錄下來的資料，作如上述的簡單數學分析，他就會得到一個一般化的經驗定律（empirical law）——在上述的每個情況下，加速度都爲常數——所以在假定此定律爲眞的設想下，他可以利用一些基本的數學運算，來作一些預測。例如，在上述的例子中，第 5 秒內的平均速度是 $v = 7 + 2$，而第 5 秒結束時，玻璃珠所滾的距離是 $x = 16 + v$（v 由上面式子的計算爲 9）。只要玻璃珠所滾的斜坡長超過 1 公尺，這些預測的結果，都能由實驗證實。

他可以看出第10秒內的速度 v，可由第 1 秒的速度 1，加上 9 個 2 得到；更一般的，第 7 秒的速度是

$$v = 1 + 2(t-1) = 2t - 1$$

所以，只要懂得一點點數學，他就能描述速度與時間的一般關係。

他如何預測第10秒結束時，玻璃珠所滾的距離呢？他不難算出第 3 秒結束時的距離是 $1+3+5$，而第 4 秒結束時的距離是 $1+3+5+7$，由此進一步可以算出第10秒結束時的距離應該是

$$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$$

他當然可以慢慢地把這些數目加起來，而得到答數。這種計算是小學數學課程內免不了的無趣訓練，做多了這種計算後，他當然可以將之變爲有趣些，把這些數重組後再加

$$\begin{aligned}
&1+3+5+7+9+11+13+15+17+19\\
&=(1+19)+(3+17)+(5+15)\\
&\quad+(7+13)+(9+11)\\
&=20+20+20+20+20\\
&=20\times 5=100
\end{aligned}$$

他也許會仔細想想，20×5 中的 5 是那裏出來的，它與原來問題中的第10秒的10有什麼關係？他應該不難看出 5 是10的一半。20又是怎樣來的？顯然，$20 = 1 + 19$，其中 1 與19分別是第 1 秒內與第10秒內的平均速度。由此，他可以預測第 100 秒內的平均速度，與 100 秒結束時的距離如下：

$$v = 1 + 2(100-1) = 199$$

$$\begin{aligned}
x &= \frac{100}{2}\times(1+199)\\
&= 50\times 200 = 10000
\end{aligned}$$

一般的說，第 t 秒結束時的距離爲

$$\begin{aligned}
x &= \frac{t[1+(2t-1)]}{2}\\
&= \frac{t(2t)}{2} = t^2
\end{aligned}$$

要得到上述的式子，他需要用到數系裏的一些性質，符號運算的一些規則，如 $1+(c-1)=c$，$t(2t)=2t^2$ 與 $2t^2/2=t^2$ 等。但這些細節其實對大局而言是無關緊要的，重要的是，他在這裏由一個數學模型（mathematical model）開始

$$a = 2 \quad （加速度爲常數）$$

這是一個描述玻璃珠在斜坡上滾動的運動模型。他對此數學模型作了數學分析，利用數系的性質，符號運算的規則，他知道這些東西可以應用到玻璃珠的滾動以外的事情上去。他使用了數學語言，即代數表達式，並知道這是得到時間 t 與距離 x 間關係的有力的工具。

由這個簡單的 $a = 2$（即加速度爲常數 2）的數學模型，他可以只靠邏輯推理，而不是依賴進一步的觀察，就推得距離 x 與時間 t 的關係。換句話說，他由演繹方法推得一些他以前不知道的知識。當然，他需要把這些知識，用滾玻璃珠的日常生活語言解釋出來，並用實際的實驗來證實他的預測。

在他作 x 與 t 關係的分析中，這個小孩用到 $20\times 5 = 100$，$1+(c-1)=c$ 等的事實與性質（或規則），這些都是數學整體的一部分，而且是將來進一步學習的重要工具。如果甲生作了以上的玻璃珠實驗與分析後，告訴乙生他發現了 $v = 2t - 1$，則此乙生也學到了玻璃珠滾動的知

識。當然，這是在此乙生能懂得上述方程式的假定下，而這點是非常重要的。因爲要每個學生重新發現人類歷史上的重要知識，是件不可能的事情，所以每個學生都多少需要學到表達這些知識的工具，即數學，例如方程式與圖表等等。即使如此，這些學生還是得有能力把由數學表達的知識，自行解釋回日常生活的語言，才能解決他們所碰到的問題。

讓我們回到利用 1 元，5 元硬幣與10元紙幣湊錢的例子。我們不難看到，玻璃珠滾動的分析中，與這個例子有相通之處：譬如說，用 1 元、5 元硬幣與10元紙幣湊成 90元的方法共有下列那樣多種

$$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$$

這其實就是玻璃珠在10秒鐘內在斜坡上所滾的距離 x。因此，學生可以看到，一個抽象的數學問題（上述的求和問題），可以應用到完全不相關的情況上去，而在每個不同的情況，都有其適合的解釋與內容。

在玻璃珠滾動的例子中，t 秒內所滾的距離 x 是 $x=t^2$。這個方程式因此就可以用來表達湊錢的例子如下

$g(10n)$ = 利用 1 元、5 元硬幣與10元紙幣湊成 n 元的方法

$$=(n+1)^2$$

譬如說，湊成 1000 元的方式就有下列那麼多種

$$g(1000)=(100+1)^2=101^2$$
$$=10201$$

由此看來，精通一些基本的數學知識，經常會有一些異想不到的方便。例如，上述頭 t 個奇數和的計算，不但解決了玻璃珠滾動的距離問題，也解決了用 1 元、5元硬幣與10元紙幣湊錢的問題。教學的最好的策略，就是要讓學生有機會得到類似上述的經驗，如此，他們才能欣賞基本數學知識的可貴，大大的提高他們的內在學習動機。

〔譯者現職：國立臺灣大學數學系教授〕

（上接43頁，從$\sqrt{2}$談起——簡論實數系的完備性）

令 n 使得 $x_n-x_0<a-x_0$ $\therefore x_n<a\Rightarrow x_n\notin A$ 矛盾。若 d 爲 S 之上界，則 $d>x_n-\frac{1}{n}$ $\forall n\in N$ $\therefore d\geq\lim_{n\to\infty}(x_n-\frac{1}{n})=x_0$ $\therefore x_0$ 爲 S 之最小上界。

(5)⇒(1) 已知 $S\subset R$，$S\neq\phi$ 且 S 上方有界，設 $B=\{d\mid d\in R，d$ 爲 S 之上界$\}$ 令 $R-B=A$ 則 (A, B) 爲 R 中之一割切。∵已知 S 有最小上界 ∴ B 有最小元素。

四、結　論

從問 $\sqrt{2}$ 之值是多少？是 1.414235 ？或問「π 值是多少？」等問題，可發現有理數系存在許多的「缺陷」，即它不是「連綿不斷」的。經由 Dedekind利用「割切」的方法及 Canton，Weierstrass 及 Cauchy 等人的努力，才定義了實數。而「完備性」使實數系具有了「連綿不斷」的性質。對往後分析學的發展，提供了重要的貢獻。

參考資料

1. 林義雄、林紹雄著：理論分析初步（修訂一版）
2. 陳昭地、顏啓麟著：數學分析（汝旭）
3. 楊維哲著：何謂實數（商務）
4. 詹進吉譯：數學之內容方法及意義㈢（徐氏基金會）

〔作者現職：台灣省立蘭陽女中教師〕

（上接55頁，國中數學及自然學科學習成就評量資料）

雄蠅的培育法與生殖能力，說明生物防治法的運用原理。

科學家培育不育性雄蠅，以控制螺旋蠅是要利用這種蠅的那一項特性？

(a)自然界中雄蠅飛得慢
(b)自然界中雄蠅很少
(c)自然界中雄蠅身體較小
(d)自然界中雄蠅一生只交配一次