

百分位數和百位名次

——一個自學的循序教材(中)

蔣德勉

—— 本文上接第24期第16頁 ——

38. 現在請看 A 班的數據表，我們發現獲得 15 分的同學共有 3 位。因此，15 分的意義就代表由下限 ____ (多少) 到上限 ____ (多少) 的一段距離。
39. 因為數據是連續的，所以這三個 15 分就均勻地分配在由 14.5 到 15.5 的一段組距上。在數線上言，15 的一點剛好存在於該組的中點上，因此分配在由 14.5 延伸到 15 之間的一段距離的 15 分的個數，剛好是這三個的 ____。
40. 三個的一半是 ____ 個。
這是一個數學邏輯的比例觀念，請透澈領悟，切勿掉以輕心。
41. 我們已知約翰在 A 班中得 15 分，如果我們想要計算他的百分名次，首先必須求出在 15 分的一組以下的各組，共有多少個次數 (即頻度)，就是將表中 f 一行中，在 15 分以下各組的次數 ____ 起來。
42. 如果我們要計算好幾個百分名次，就需要建立一個**累積次數** (Cumulated frequency, cf) 的項目。累積次數就是到達該組下限而低於該組之各組的次數的總和。請由最低分數 5 分開始，試完成數據 A 與數據 B 中的 cf 的統計。
43. 現在讓我們來計算數據 A 中之 15 分的百分名次。因為數據是連續的，所以 15 是代表由 14.5 延伸到 15.5 的一段組距。首先我們要在 cf 項目欄中，找到 15 之一組的下一組的 ____。
44. 15 之一組的下一組是 ____ 的一組，這一組的累積次數是 ____。
45. 在前面第 38 ~ 40 序目中，我們曾經討論過，由 14.5 到 15 的一段距離中，分布著 ____ (幾) 個 15 分的分數。
46. 將這兩個數目總加起來，就可以得到 15 分以下的累積次數：

$$12 + 1.5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

38. 14.5
15.5

39. 一半

40. 1.5

41. 總加

42. 請翻開第 8
頁的累積次
數表以自行
核對。

43. 累積次數

44. 14
12

45. 1.5

46. 13.5

47. 在 15 分以下的累積次數為 13.5，但是 A 班的總次數為 20，因此低於 15 分之累積次數對於總次數的百分率是：

$$\frac{13.5}{20} \times 100 = \underline{\quad\quad} \%$$

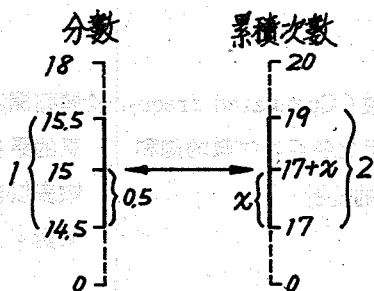
48. 累積次數之百分率的數值就是百分名次的數值。因此在 A 班中，15 分的百分名次是 67.5 (多少)。

49. 在前面第 29 序目中，我們曾經提到與百分名次相對映的分數叫百分位數。因此在 A 班中，百分名次為 67.5 的百分位數是 15 (多少)。

50. 現在讓我們再來看 B 班的數據，在累積次數 cf 項目欄中，我們可以找到 15 之一組的下一組的累積次數是 17 (多少)。

51. 計算看看，由 14.5 延伸到 15.5 的一段組距中，一共分布了 2 (幾) 個 15 分的分數。

52. 因為分數與次數是彼此相對映的兩種數值，所以我們可以將它們繪成下圖的比例關係：



1 是由 14.5 到 15.5 的距離 (即組距)。

0.5 是由 14.5 到 15 之間的距離。

2 是 15 的一組所分布的次數。

x 是由 14.5 到 15 之間所分布的次數。

因此可得比例式如下：

$$1 : 0.5 = 2 : x$$

$$\therefore x = \underline{\quad\quad}$$

53. 在上圖中，15 分的累積次數 = $17 + x$ 已知 $x = 1$

$$\therefore 15 \text{ 分的累積次數} = 17 + 1 = 18$$

因此 15 分的累積次數對於總次數的百分率，即可由下式求得：

$$18 \div \underline{\quad\quad} \times 100 = \underline{\quad\quad} \%$$

54. 在 B 班中，百分名次為 90 的百分位數是多少分？

55.現在我們可以回顧一下15分的百分名次：

在A班中，是67.5。 在B班中，是90。

根據這兩個數據，我們可以說，在A班得15分的約翰的學習成就，比在B班得15分的強森的學習成就較（好 / 差）。

55.差

56.事實上，百分名次的計算可以一般化為如下的基本公式：

$$R = \frac{cf}{N} \cdot 100$$

R：百分名次。 cf：累積次數。 N：總次數。

乘上100的目的，則是要將它化為_____，以便與其他團體或個體相比較。

56.百分率

57.事實上，天下事不如人意者常十九。數據表中的累積次數未必剛好等於我們的期望值，同時各組分數所對映的次數，又經常千變萬化。因此在計算累積次數時，必需要先計算該分數的**部分次數**，然後才能求出該分數的累積次數。請翻閱前面第53序目，其中x所代表的就是由14.5到15之間的_____。

57.部分次數

58.現在我們要進一步的來熟習百分名次與百分位數的定義。為了方便起見，百分名次為50的百分位數，簡稱為百分位數50，並簡寫為 C_{50} 。簡單地說，在 C_{50} 以下的累積次數，共佔了總次數的_____%。

58.50

59.同樣地， C_{90} 代表百分名次為90的百分位數，也就是說，該分數以（上 / 下）的累積次數在_____中共佔了90%。

59.下
總次數

60.某分數以下的累積次數，在總次數中佔有40%，則該分數就叫做百分位數_____，可以簡寫為_____。

60.40
 C_{40}

61.事實上，百分位數只是分數度量之數線上的一個特別的（點 / 線 / 面）。

61.點

62.假如您是A班的數學老師，只想報告分數分布的大概情形。~~最好的辦法~~就是求出代表上等、中等和下等的三個百分位數。請問這該是那三個百分位數？

62. C_{25} ， C_{50}
 C_{75}

63.現在讓我們來計算A班的 C_{25} 。因為A班的總次數為20，所以 C_{25} 以下的累積次數： $20 \times 25\% = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

63.5
5

因此我們必須在A班數據表的cf欄中，找出累積次數為_____所對映的一個分數。

64.請拿出A班的數據表，在cf欄中，我們找不到累積次數剛好是5，只有比5小的_____和比5大的_____。

64.4
10

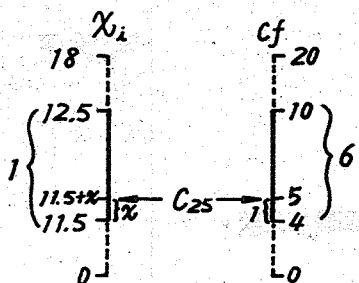
65. 累積次數為 4 的上限分數為 ____ (多少)。

65. 11.5

66. 由 11.5 到 12.5 的組距之間所分配的次數是 ____ (多少)。

66. 6

67. 請看下圖：



如果您已甚少記憶，則請翻開第 50 序目溫習一下。要不然，再向前翻到第 30 序目，開始複習。

67. $\frac{1}{6}$ (或 0.17)

我們可以得到如下的比例式：

$$1 : x = 6 : 1$$

$$\therefore x = \underline{\hspace{2cm}}$$

68. 根據上圖， $C_{25} = 11.5 + x$ ，今已知 $x = 0.17$

68. 11.67

$$\therefore C_{25} = 11.5 + 0.17 = \underline{\hspace{2cm}}$$

69. 現在讓我們計算 C_{50} 的數值。 C_{50} 以下的累積次數，在總次數中共佔有 ____ %。

69. 50

70. 在 20 個總次數中佔有 50% 的累積次數是 ____ (多少)。

70. 10

71. 在 A 班數據表的 cf 欄中，我們真幸運，剛好找到了累積次數等於 10 的一組。該組所對映過去的一組的上限是 ____ (多少)。

71. 12.5

72. 因為 12.5 以下的累積次數剛好是 ____ (多少)。反過來說，12.5 的百分名次是 50。所以 $C_{50} = \underline{\hspace{2cm}}$ (多少)。

72. 10

12.5

73. 現在，我們來求 C_{75} 的數值。20 個總次數的 75% 是 ____ (多少)。

73. 15

74. 在 A 班數據表的 cf 欄中，我們又幸運地找到了累積次數等於 15 的一組。因此， $C_{75} = (15.5 / 15 / 14.5)$

74. 15.5 若有錯，請翻閱第 42~46 序目。

75. 現在請將 B 班的數據表取出。為了方便起見，請用紅筆 (或不同顏色的筆)，將 B 欄各組 (分數) 的上限和下限註上。實際上，兩組之間只有一個界限，兩端之外各有一個上限或下限。

75. 請翻開第 8 頁 B 班各組的上限和下限以自行核對。

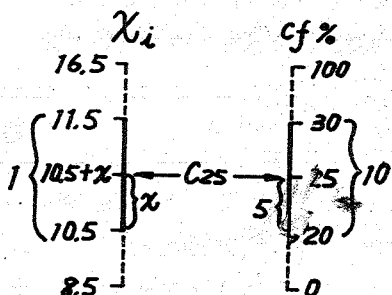
76請在表內cf的右側，再添上百分累積次數cf%的一欄，所謂百分累積次數，就是將各累積次數除以總次數再乘以100，也就是將它化為百分率。譬如9以下的累積次數為2，則其 $cf\% = \frac{2}{20} \times 100 = 10$ 請按照這一方法演算。

76請翻開第8頁的B班百分累積次數表自行核對。

77現在讓我們計算 C_{25} ，因為有了cf%一欄，我們就可以直接在cf%欄中尋找25的一組，不幸得很，沒有剛好25的一組，我們只能取用較低之20的一組，其所對映之分數的一組的上限是____（多少）。

77. 10.5

78現在將該資料濃縮成下面的圖解：



得比例式如下：

$$1 : x = 10 : 5$$

$$\therefore x = \underline{\hspace{2cm}}$$

78. $\frac{1}{2}$ (或0.5)

79根據圖解， $C_{25} = 10.5 + x = 10.5 + 0.5 = \underline{\hspace{2cm}}$

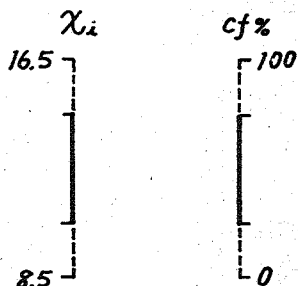
79. 11

80現在來求 C_{50} 的數值，在cf%欄中，沒有剛好的50，只有較低的____，其所對映之分數組的上限是____。

80. 40

12.5

81請自行完成下圖的圖解：



81見第8頁的 C_{50} 的比例圖解以自行核對。

82故得比例式如下：

$$1 : x = 30 : 10 \quad \therefore x = \underline{\hspace{2cm}}$$

82. 0.33

83故得 $C_{50} = \underline{\hspace{2cm}}$

83. 12.83

84現在請您自行計算B班的 $C_{75} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

84. 13.83

〔作者現職：彰化省立教育學院科學教育系講師〕

（未完待續）

（下接8頁）

此解稱為史瓦濟解。在星球外面的空間，運用此解，可以得到相當好的結果。此解從表面上看起來，會誤以為質量為 m 的星球，其半徑不得低於 r

$$= 2m, \text{ 因為當 } r = 2m \text{ 時, } g_{00} = 1 - \frac{2m}{r} = 0$$

$$, g_{11} = (1 - \frac{2m}{r})^{-1} = \infty. \text{ 事實上並非如此,}$$

因為經由座標轉換 $\tau = t + f(r)$, $\rho = t + g(r)$

$$\text{則史瓦濟解變成 } ds^2 = d\tau^2 - \frac{2m}{\mu(\rho - \tau)^{2/3}} d\rho^2 - \mu^2(\rho - \tau)^{4/3} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

$$\text{上式中 } \mu = (\frac{3}{2}\sqrt{2m})^{2/3}. \text{ 當 } r = 2m \text{ 時,}$$

$\rho - \tau = 4m/3$, 可見在 $r = 2m$ 時, 仍有解存在。經由解析連續 (analytic continuation) 得知當 $r < 2m$ 時亦有解。不過 $r < 2m$ 的區域無法把訊息傳遞至 $r > 2m$ 的區域, 因為任何訊號要穿越 $r = 2m$ 界面時需要無限長的時間, 所以在界面外的觀察者無法直接觀察到 $r < 2m$ 區域內所發生的事情, 此區域叫做黑洞, 因為物體只能掉入黑洞, 但卻無法從黑洞跑出來 (本附錄所述係古典的理論, 有關黑洞的量子理論參考本文第五節)。

主要參考資料

1 R. Penrose; Scientific American, May, 1972.

2 S. W. Hawking; Scientific American, January, 1977.

[作者現職：國立臺灣師範大學物理系教授]

(上接13頁, 戴爾的經驗塔(上)——教學資源運用的原則)

[註釋]

註1: Edgar Dale, Audio-visual Methods in Teaching, New York: The Dryden press, 1954.

註2: 方炳林, 普通教學法, 教育文物出版社, 民國63年2月, P. 265.

註3: Shannon, C. E. and W. Weaver, The Mathematical Theory of Communication, Urbana: University of Illinois Press, 1963

註4: 楊榮祥, 思想傳播的模式, 科學教育月刊第二十二期, 師大科教中心, 民國67年10月, P. 12-13.

註5: 楊榮祥, 探討式教學模式分析, 科學教育月刊第二十三期, 師大科教中心, 民國67年11月, P. 17-26.

[作者現職：國立臺灣師範大學生物系副教授]

(上接23頁, 百分位數和百分名次——一個自學的循序教材(中))

A. 42

累積次數表

x_i	$cf_{(A)}$	$cf_{(B)}$
18	20	20
17	19	20
16	18	20
15	15	19
14	12	17
13	11	14
12	10	8
11	4	6
10	3	4
9	2	2
8	2	0
7	2	0
6	1	0
5	1	0

A. 75

B班各組的上限與下限

B
16.5
15.5
14.5
13.5
12.5
11.5
10.5
9.5
8.5

A. 76

B班百分累積次數表

B	cf%
16	100
15	95
14	85
13	70
12	40
11	30
10	20
9	10
8	0

A. 81

