從 $\sqrt{2}$ 談起—簡論實數系的完備性

江滄樑

一、緒　言

在高中數學第二冊中，談到了實數系的完備性。其中實驗本的說明如下：（P－69）

完備性（第一形式）：設 $<a_n>$，$<b_n>$ 是兩實數數列，滿足下列性質：

(1) $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq \cdots \leqq b_n \leqq \cdots \leqq b_2 \leqq b_1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

就必有一實數 ξ，使 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

完備性（第二形式）：如果 $<a_n>$ 是一個有上界 c 之遞增數列，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq c$。就會有一個實數 ξ，使 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \xi \leqq c$

本文之目的在以較廣泛之觀點，補充說明實數系的完備性，提供教師在教學上之參考。

二、無理數的存在

數系的發展，由自然數系擴展到整數系及有理數系時，學生們在瞭解及接受上，並無特別困難。在介紹無理數時，通常是利用數線的方法來說明：在直線 L 上，取一定點 O 爲原點。取定長 $\overline{OA}$ 之長爲單位長，$A \in L$。過 A 作垂直 L 之線 M，在 M 上取 B 點使 $\overline{AB} \cong \overline{OA}$。由畢氏定理知 $\overline{OB}$ 之長爲 $\sqrt{2}$ 單位長。其次證明 $\sqrt{2} \notin Q$（有理數系）：令 $\sqrt{2} \in Q$，卽 $\sqrt{2} = \frac{q}{p}$，其中 p 及 $q \in Z$（整數系）$p \neq 0$ 且 p，q 互質。$\therefore 2 = \frac{q^2}{p^2} \Rightarrow q^2 = 2p^2 \therefore q = 2m$，$m \in Z$；$\therefore (2m)^2 = 2p^2 \therefore p^2 = 2m^2 \Rightarrow p = 2n$，$n \in Z$ 則可得 p 及 q 有公因數 2，與已知矛盾。$\therefore \sqrt{2} \notin Q$，其他證明 $\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$ 等類似此種方法。這種說明比較片段性，利用下列方法可將任一非完全平方之正整數 d，證得 $\sqrt{d} \notin Q$。

證明：令 $\sqrt{d} \in Q$，$i.e\ \sqrt{d} = \frac{b}{a}$，$a$，$b \in N$ 且互質，$a > 1$。$\therefore d = \frac{b^2}{a^2}$ ……① $\because d$ 爲非完全平方之正整數，$\therefore \exists\, c \in N$，$\ni c^2 < d < (c+1)^2 \therefore c^2 < \frac{b^2}{a^2} < (c+1)^2 \Rightarrow a^2c^2 < b^2 < a^2(c+1)^2 \therefore ac < b < ac + a \therefore 0 < b - ac < a$，令 $a' = b - ac$ 則 $0 < a' < a$ ……② 由① 得 $b^2 = a^2 d \therefore db^2 = (ad)^2 > c^2b^2 \therefore ad > bc$ 令 $b' = ad - bc > 0 \therefore b' \in N$ 則 $b'^2 - da'^2 = (ad - bc)^2 - d(b - ac)^2 = a^2d(d - c^2) - b^2(d - c^2) = (a^2d - b^2)(d - c^2) = 0$（$\because a^2d - b^2 = 0$）$\therefore b'^2 = da'^2 \therefore d = (\frac{b'}{a'})^2 \therefore \sqrt{d} = \frac{b'}{a'}$ 與已知矛盾 $\therefore \sqrt{d} \notin Q$。

確認了無理數的存在，瞭解有理數系的缺點，諸如不能提供形如 $x^2 = 2$ 之簡易方程式之解等。爲求更精細及廣泛的應用，有必要將有理數系擴展。實數系與有理數系之最基本差異就在於完備性了，而完備性更是微積分學的基礎。

預備知識：令 Q 爲全體有理數之集合，R 爲實數之集合 (A)割切(cut): 設 A、B 爲 Q（或 R）之兩個子集合，具有下列性質：(i) $A \neq \phi$，$B \neq \phi$ (ii) $A \cap B = \phi$，$A \cup B = Q$（或 R）(iii) 若 $x \in A$，$y \in B$ 則 $x < y$，則稱 A、B 在 Q（或 R）中產生一割切，記爲（A，B），稱爲 Q（或 R）中之一割切。

(B)有界集（bounded set）：$S \subset R$，$S \neq \phi$，若 $\exists\, a \in R$ $\ni x \leqq a$（$x \geqq a$）$\forall x \in S$ 則 a 稱爲 S 之一個上界（下界），此時稱 S 上方有界（下方有界）　若 a 爲上界(下界)中最小（大）者，

稱 a 爲 S 之最小上界（最大下界）（i.e 最小上界 $a=l.u.b\ S \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0，\exists x\in S \ni x+\varepsilon>a$；最大下界 $b=g.l.b\ S\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0，\exists y\in S\ni b+\varepsilon>y$ ）若 S 有上、下界時，稱 S 爲有界集。

(c)柯西數列（Cauchy sequence）：數列 $\{x_n\}$ 若滿足：當 $m，n\to\infty$ 時，$|x_n-x_m|\to 0$ 則此數列 $\{x_n\}$ 稱爲柯西數列。

(D)阿基米德（Archimedes）性質：對於每一個 $a\in R$，存在 $n\in Z$ 使得 $a<n$。

三、實數系的完備性

已知 R 具有阿基米德性質的有序體，實數系的完備性具有下列五個等價性質：

(1) R 中任意一割切（A，B）則 A 有一個最大元素或 B 有一個最小元素。

(2) R 中上方（下方）有界的上升（下降）點列，必收斂到它的最小上界（最大下界）。

(3)有兩點列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 若滿足：(i) $x_1\leqq x_2\leqq\cdots\leqq x_n\leqq\cdots\cdots\leqq y_n\leqq y_{n-1}\leqq\cdots\leqq y_1$ (ii) $y_n-x_n\to 0$ 則 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$

(4) R 中之柯西數列必爲收斂數列

(5) R 中任意非 ϕ 且上方（下方）有界之集合，必有最小上界（最大下界）

證明：（按(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(5)⇒(1)）

(1)⇒(2)令 $x_n\leqq x_{n+1}\leqq\cdots\leqq y$（上界）且 $S=\{x_n\mid n\in N，x_n\in R\}$ 則 $S\neq\phi$ 且上方有界。

設 $B=\{x\in R\mid x$ 爲 S 之上界$\}$ 且 $R-B=A$ 則(A,B)爲 R 中之一割切。由已知(1)成立，∴ A 有最大元素或 B 有最小元素。

若 A 有最大元素 x_0，則 $x_0\notin B$。∴ x_0 不爲 S 之上界，∴ $\exists a\in S\ni x_0<a$。$\Rightarrow x_0<\dfrac{x_0+a}{2}<a$ ∴ $\dfrac{1}{2}(x_0+a)\in A$ 且 B，矛盾。∴ B 有最小元素 y_0，i.e y_0 爲 $\{x_n\}$ 之最小上界。$\forall\varepsilon>0$，$\exists n_\varepsilon\in N\ni y_0-\varepsilon<x_{n_\varepsilon}\leqq x_n\leqq y_0\leqq y_0+\varepsilon$，$\forall n\geqq n_\varepsilon$。∴ $|x_n-y_0|<\varepsilon\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_n=y_0$

∴ y_0 爲 S 之最小上界。

(2)⇒(3) 已知 $x_1\leqq x_2\leqq\cdots\leqq x_n\leqq\cdots\leqq y_n\leqq y_{n-1}\leqq\cdots\leqq y_1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 均存在。設 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$ 欲證 $a=b$ 若 $a<b$ 則 $x_n\leq a<b\leq y_n$ ∴ $\forall n\ y_n-x_n\geq b-a>0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|y_n-x_n|>0$ 與條件(ii) $y_n-x_n\to 0$ 不合。若 $a>b$ 令 $a-b=\varepsilon>0$ ∵ $b=g.l.b.\{y_n\}$ ∴ $\exists k\in N\ni b+(a-b)>y_k$ ∴ $a>y_k$ 令 $\varepsilon'=a-y_k>0$ 由 $a=l.u.b.\{x_n\}$ ∴ $\exists j\ni x_j+\varepsilon'>a$ ∵ $\varepsilon'=a-y_k\Rightarrow x_j>y_k$ 與條件(i)不合 ∴ $a=b$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$。

(3)⇒(4) 設 $\{x_n\}$ 爲 R 中之柯西數列，給定 $k\in N$，$\exists n_k\in N\ \ni n\geq n_k$ 時，$|x_n-x_{n_k}|<\dfrac{1}{2^k}$

∴ $x_{n_k}-\dfrac{1}{2^k}<x_n<x_{n_k}+\dfrac{1}{2^k}$。$\forall k$ 要求 $n_k<n_{k+1}$

則 $x_{n_1}-\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^i}<x_{n_2}-\sum\limits_{i=2}^{\infty}\dfrac{1}{2^i}<\cdots<x_{n_k}-\sum\limits_{i=k}^{\infty}\dfrac{1}{2^i}<\cdots<x_{n_k}+\sum\limits_{i=k}^{\infty}\dfrac{1}{2^i}<\cdots<x_{n_1}+\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^i}$

令 $a_k=x_{n_k}-\sum\limits_{i=k}^{\infty}\dfrac{1}{2^i}$ $b_k=x_{n_k}+\sum\limits_{i=k}^{\infty}\dfrac{1}{2^i}$

則 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n\leq\cdots\cdots\leq b_n\leq b_{n-1}\leq\cdots\leq b_2\leq b_1$ 由已知(3)成立 ∴ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$，令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x$ ∴ $\forall\varepsilon>0$，$\exists k\in N\ni x-a_k<\varepsilon$ 且 $b_k-x<\varepsilon$ ∴ $x-\varepsilon<a_k<b_k<x+\varepsilon\Rightarrow$ 當 $n\geq n_k$ 時，$x-\varepsilon<x_n<x+\varepsilon$ ∴ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$。

(4)⇒(5)令 $S\neq\phi$，$S\subset R$ 且 S 上方有界。欲證 S 有最小上界。設 $A=\{d\mid d\in R，d$ 爲 S 之上界$\}$ ∴ $A\neq\phi$ 若 $d\in A$ 且 $e\geq d$，則 $e\in A$ ∴ $\forall n\in N$ $\exists x_n\in A\ni x_n-\dfrac{1}{n}\notin A$ ∴ $|x_n-x_m|<\max\{\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{m}\}$ ∴ $\{x_n\}$ 爲柯西數列。由已知條件可得 $\{x_n\}$ 爲收斂 ∴ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 欲證 x_0 爲 S 之上界 若 x_0 不爲 S 之上界則 $\exists a\in S\ni a>x_0$

（下接38頁）

識。當然，這是在此乙生能懂得上述方程式的假定下，而這點是非常重要的。因爲要每個學生重新發現人類歷史上的重要知識，是件不可能的事情，所以每個學生都多少需要學到表達這些知識的工具，即數學，例如方程式與圖表等等。即使如此，這些學生還是得有能力把由數學表達的知識，自行解釋回日常生活的語言，才能解決他們所碰到的問題。

讓我們回到利用 1 元，5 元硬幣與10元紙幣湊錢的例子。我們不難看到，玻璃珠滾動的分析中，與這個例子有相通之處：譬如說，用 1 元、5 元硬幣與10元紙幣湊成 90元的方法共有下列那樣多種

$$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$$

這其實就是玻璃珠在10秒鐘內在斜坡上所滾的距離 x。因此，學生可以看到，一個抽象的數學問題（上述的求和問題），可以應用到完全不相關的情況上去，而在每個不同的情況，都有其適合的解釋與內容。

在玻璃珠滾動的例子中，t 秒內所滾的距離 x 是 $x=t^2$。這個方程式因此就可以用來表達湊錢的例子如下

$g(10n)$ ＝利用 1 元、5 元硬幣與10元紙幣湊成 n 元的方法

$=(n+1)^2$

譬如說，湊成 1000 元的方式就有下列那麼多種

$$g(1000)=(100+1)^2=101^2=10201$$

由此看來，精通一些基本的數學知識，經常會有一些異想不到的方便。例如，上述頭 t 個奇數和的計算，不但解決了玻璃珠滾動的距離問題，也解決了用 1 元、5元硬幣與10元紙幣湊錢的問題。教學的最好的策略，就是要讓學生有機會得到類似上述的經驗，如此，他們才能欣賞基本數學知識的可貴，大大的提高他們的內在學習動機。

〔譯者現職：國立臺灣大學數學系教授〕

（上接43頁，從$\sqrt{2}$談起──簡論實數系的完備性）

令 n 使得 $x_n-x_0<a-x_0\ \therefore x_n<a\Rightarrow x_n\notin A$ 矛盾。若 d 爲 S 之上界，則 $d>x_n-\frac{1}{n}\ \forall n\in N\ \therefore d\geq\lim_{n\to\infty}(x_n-\frac{1}{n})=x_0\ \therefore x_0$ 爲 S 之最小上界。

(5)⇒(1) 已知 $S\subset R$，$S\neq\phi$ 且 S 上方有界，設 $B=\{d\mid d\in R，d$ 爲 S 之上界$\}$ 令 $R-B=A$ 則 $(A，B)$ 爲 R 中之一割切。∵已知 S 有最小上界∴ B 有最小元素。

四、結　論

從問$\sqrt{2}$之值是多少？是1.414235 ？或問「π 值是多少？」等問題，可發現有理數系存在許多的「缺陷」，即它不是「連綿不斷」的。經由Dedekind利用「割切」的方法及 Canton，Weierstrass 及 Cauchy 等人的努力，才定義了實數。而「完備性」使實數系具有了「連綿不斷」的性質。對往後分析學的發展，提供了重要的貢獻。

參考資料

1. 林義雄、林紹雄著：理論分析初步（修訂一版）
2. 陳昭地、顏啓麟著：數學分析（汝旭）
3. 楊維哲著：何謂實數（商務）
4. 詹進吉譯：數學之內容方法及意義(三)（徐氏基金會）

〔作者現職：台灣省立蘭陽女中教師〕

（上接55頁，國中數學及自然學科學習成就評量資料）

雄蠅的培育法與生殖能力，說明生物防治法的運用原理。

科學家培育不育性雄蠅，以控制螺旋蠅是要利用這種蠅的那一項特性？

(a)自然界中雄蠅飛得慢
(b)自然界中雄蠅很少
(c)自然界中雄蠅身體較小
(d)自然界中雄蠅一生只交配一次