

探討國中階段機率與統計 的教材內涵與指導方法(上)

陳冒海 譯

一、序言

九年義務教育實施後，國中階段的教育已成為義務教育之一環。因鑑於“機率與統計”跟日常生活的關係至為密切，所以國內有許多專家學者都極力主張應該去國中階段引進適當的“機率

與統計”的教材。師大科教中心數學實驗研究委員會在研究、分析，比較日、美、英、法、德、比、俄等國現行國中階段的數學教材，並與國內專家學者磋商後，初步決定將下述機率與統計教材列入國中實驗研究課程中進行實驗研究。

綱	要	細	目	備	註
統計意義淺介		1 提出日常生活中所涉及的統計問題，例如天氣預測、電視收視調查、民意調查、消費品調查、品質管制、藥品或疫苗之檢定等。 2 概略介紹統計的過程。		讓學生概略認識統計的過程是：資料之收集、整理、分析，並幫助吾人作最佳的決策。	
統計圖表		1 次數分配與相對次數分配 (1) 給定資料（例如體重、身高、學科成績）、利用平面坐標系將此資料之分配製成點次數圖形。 (2) 觀察所給予的點次數圖形，指出某測定值出現之次數。 (3) 利用班上同學之身高、體重、數學成績資料做出點次數圖形。 (4) 相對次數分配之意義，並以百分比表之。 (5) 考慮(1)，(2)，(3)中對應相對次數分配的情況。 (6) 從給予實例作圖中估計某範圍內資料所佔的百分比，並對(3)中作類似的問題（但不作結論）。 2 長條圖與次數多邊形（折線圖） (1) 大樣本歸類的資料之長條圖作法。 (2) 長條圖轉換成次數多邊形之方法。 (3) 將班上或同年級同學之身高、體重、數學成績等資料製成長條圖及次數多邊形。		含國小教材的複習。以實例及作表為主。	

綱	要	目	備	註
		(4)應給予之長條圖或次數多邊形估計某範圍內資料所佔的百分比，並對(3)中作類似的問題（但不作結論）。 3. 累積次數分配與相對累積次數分配 (1)累積次數分配及相對累積次數分配的意義。 (2)將在(2)中所處理之實例加以列表（包含累積次數百分比及相對累積次數百分比）。 (3)累積次數分配及相對累積次數之折線圖表示法。		
簡單相關關係		以圖解說明兩資料間之相關關係，例如： 1. 身高、體重之相關關係。 2. 數學、理化成績之相關關係。 3. 國文、數學成績之相關關係。 4. 產量與溫度之相關關係。	不涉及正式之「相關」意義，僅將資料製成平面座標系上的圖形觀察其關係。	
機 率		1. 擲銅板（或骰子）全班同學中，每人擲骰子 10 次，並探討各種情況出現的分配。 2. 擲二個骰子（或銅板）看出點數和的分配。 3. 實驗機率的意義。 4. 由前節所得的結果，觀察各種情形的分配趨向。 5. 理論機率的意義（包含生物課本上遺傳性別之法定法則之例題）。 6. 簡單機率的計算。	注重實際之操作。 不涉及樣本空間等機率正式名詞。	

目前世界各國之國中數學教材大致上可分為集合與函數、數與式、幾何圖形、以及統計與機率等幾個大單元。從數學教育現代化的趨勢來看，像集合與函數、數與式、幾何圖形等所追求的目標，一言以蔽之，可說是在於數學模式化與系統化。但在國中階段所讀的**機率與統計**却不是朝著這個方向去發展，而是希望學生能將日常發生在其周遭的事象，利用科學的方法（或方式）去實驗、分析、比較，歸納與推測。也可以說是想培養學生將發生於其身旁的各種事象，用機率的**想法**去做統計處理的能力。

那麼我們該如何把握這個精神與重點將這些

教材妥善地編寫出來，以及該如何去提醒教師照著這個方向去指導學生呢？有關這些問題，我個人覺得日本數學教育學會所編著之“現代の數學教育②—中學校篇”頗有參考價值，茲摘譯於下，並望大家多多批評指教。

二、機率與統計的教學目標

(甲)教學目標

(1)使學生瞭解機率與統計的意義，特性及其實際應用的必要性。

(2)灌輸學生有關機率與統計的基本概念與知識，延伸其對機率與統計的想法與處理的能力。

(3)使學生能分析、整理、調查與實驗所得的資料，繪製統計圖表，並由之體會出機率的意義以及做統計的方法與用意，並學習正確處理事務的態度。

(4)知道為使學活合理化，科學化，應隨著目的，適當地利用機率與統計，俾對種種問題的發展與解決有所幫助。

(2)技能目標

(1)關於機率的求法：不可只茫然觀察諸現象，應從自己所着手調查與實驗所得的資料中，去觀察這些現象怎樣才有發生的可能性，並能用此值去表現各種現象發生之難易程度。

(2)關於圖表：使能了解其特色，以便透過將資料分門別類作成圖表之方式，具體地把機率與統計的結果表現出來。

(3)關於統計的方法：從次數分配去計算平均值

點名順序

B生說：「我老是運氣不佳，數學老師對我好像特別注意，常被叫到台上去做題目，今天已被叫到兩次之多了，不像I同學，老師對他有信心，這幾天一次都未被叫到。」

I生答：「沒這回事，這完全是你座位的風水不好的原因。因為你的座位，正好在老師容易看到的地方，而我的座位奇佳，好像是它的一個盲點，老師看不到我，所以才未被點中，不信，你看，i小姐不是老師對她也很有信心嗎？但她今天也被叫到了。」

A生說：「雖說如此，但到底每人每天會被叫到幾次呢？當然，多的時候也有，少的時候也有，平均起來一星期有幾次呢？你的看法怎麼樣？」

B生說：「因為需要事先準備功課，如果能夠在事前就知道會不會被點到名，就可免於受窘丟臉那有多好！I同學請你替我們想想看吧。」

I生答：「替你想想看？但是不先調查一些事情，這種事是無法先知道的。」

A生說：「要查什麼？查那個學生在那位老師上課時被點了幾次名的統計嗎？不得了，這太麻煩了。」

I生答：「但是沒有這個統計，對會不會被點中名，就無法知道，只有憑著直覺去瞎猜了。來！大家來協力先做兩個星期的統計看看。男生與女生那一方被點得多？前排與後排又是那一排多？這很好玩，說不定老師的點名方式也有一個什麼順序。」

C生說：「數學老師是隨興指名的，毫無順序可言，但國文老師好像有一定的

與標準差，使用相關表與相關圖去判斷相關的程度，並透過計算機率與期望值等，使對諸現象能作初步的推測與檢定的工作。

三、學習之指導與評量

以上所述的兩個大目標其實是表裏一體的，很難將它們明確地分開來。至於在實際教學指導學生時，學生的反應應發生什麼變化，或要學生採取什麼行動才算真正達到我們所預期的目標呢？再者我們又應該如何去引導學生達成這些目標呢？這些問題都不是三言兩語就能說清楚的，由於機率與統計跟學校活動有著密切的關係，所以我們特別將學生在班上的活動，就稱為「點名順序」吧？分為四場問答式的對白。從其進行中之演變流程，來對這些問題加以適當的說明。

○從社會現象去捕捉問題

○B生是問題的提示者

○I君解說者，有能力。

○A君反應快

○覺得有調查統計的必要

○進行調查的意義

○關於收集資料的方法

順序。」

I 生說：「那麼，我們來分配一下工作罷。我與 *i* 小姐擔任數學科，J 君與 *j* 小姐負責英文科，G 君與 *g* 小姐國文科，H 君與 *h* 小姐社會科，分成 4 個學科去調查兩個星期的統計看看，就這樣決定了。」

第二場：同一教室，兩星期後的下課時間

I 生說：「大家所收集的統計，已經作成表了（圖一），讓我們從這張表來查看。」

C 生說：「被點名最多的是 A 君，B 君與 *e* 小姐的 8 次，最少的是 *a* 小姐的 2 次，I 君 3 次。如此看來，還是認真的人被點中的次數較少。」

B 生說：「作成這樣的表，方便多了。從這一張表，我們可以看出很多的事情來。」

點中的次數

前 排							
A	○	B	○	<i>a</i>	○	<i>b</i>	○○
△		△		△		△	
√	√	√	√			√	
√	√	√	√				
C	○	D	○	<i>c</i>	○○○	<i>d</i>	○○○
△		△		△			
		√	√				
√		√					
E	○	F	○	<i>e</i>	○○○	<i>f</i>	○
△		△		△			
√	√						
√							
G	○○○	H	○○○	<i>g</i>	○○○	<i>h</i>	○○○
△	○	△		△	○○		
√	√					√	
I		J	○○	<i>i</i>		<i>j</i>	○○○
△		△		△			○
√						√	

後 排

（圖一）

A 生說：「先給我看一下，我還是被點最多的 1 個呢！男生前排的兩人都是 8 次，噢，中間的 *e* 小姐也是 8 次，這到底是什麼緣故呢？」

I 生說：「這張表（圖二）是在 4 個科目中被點了名的統計表，數學科與英文科都是 40 人次，社會科 20 人次，國文科最少 16 人次。此外，對於平均的次數與衆數中位數也表示出來。」

B 生說：「從（下面）這張圖表來看，大體上來說平均為 6 次，7 次以上時，就算是比平均要多。但也只有被點二、三次的，這似乎有一點不太公平。」

○調查方式的想
法

○調查結果的表
現方法；表的
功用。

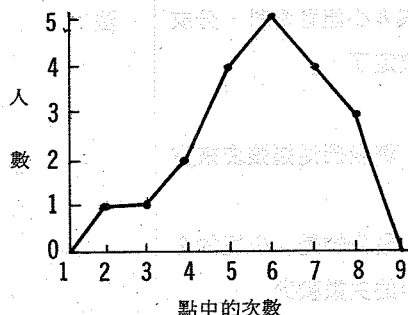
例

姓名→	A	○	←數學 (1次)
國文→	△		←英文 (1次)
(1次)	√	√	
社會→	√	√	
(4次)			

A：男生

a：女生

點中的次數與人數



(圖二)

數學	40 次
英文	40 次
社會	20 次
國文	16 次
合計	116 次
每 1 人平均	5.8 次
衆數	6 次
中位數	6 次

○ 曲折線圖表

○ 代表值的使用
方法

C 生說：「同是被點名 8 次的人，其內容也各有相異，大家來看一看這張表(1)吧。」

A 生說：「好快啊，已經做統計表了。」

表(1)點中次數多的人・少的人

	多 的 人							少 的 人				
	A	B	e	D	G	b	g		a	I	i	f
數學	1	1	3	1	4	2	5	17	1	0	0	1
英文	2	3	4	2	0	3	1	15	0	1	3	3
社會	4	3	0	3	2	1	0	13	0	1	0	0
國文	1	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	0
計	8	8	8	7	7	7	7		2	3	4	4

○ 關於資料內容
的分析

I 生說：「在數學科，g 小姐被點中 5 次最多，而我與 i 小姐 1 次都沒有。英文科的情形，大體上，與數學科大同小異。」

A 生說：「在社會科，男生被點中的較多，女生最多的只有 1 次，國文科大體上是各 1 次。」

C 生說：「社會科從圖一看來，被點中的都是前排的男生，全部達 20 次之多，其中 A 君 4 次，B 君、D 君、E 君各 3 次，計佔 65%。女生 10 人之中，只有 b、h、j 三位小姐各被點 1 次。」

○ 只從表就可看
出的結論

I 生說：「從社會科的統計資料來看，在前排的男生容易被點中，女生則不然。」

○ 對社會科點名
方法的結論

C 生說：「依我看，國文科比較公平，數學科與英文科都有問題，似乎不甚公平。」

I 生說：「公平是什麼？是指點名次數的相同嗎。須知一旦曉得點名的順序，大家就不做預習的功課了。」

○ 公平是什麼

C 生說：「但是國文科還是比社會科公道。」

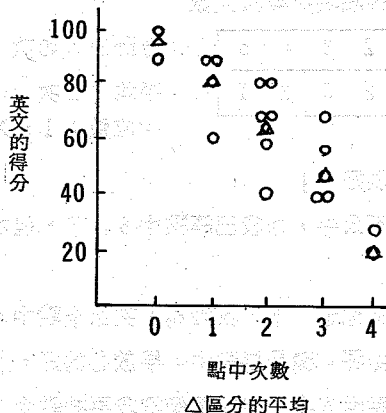
A 生說：「請等一下，英文科好像有什麼問題，G 君與 a 小姐在前次英文考試得分很高，F 君與 e 小姐則不太好……。」

C 生問：「你這是什麼意思。」

A 生答：「你看，G 君與 a 小姐被點中的次數是 0 次，而 F 君與 e 小姐則有 4 次之多。這可能是在英文得分與點名次數之間，好像有什麼關聯似的……。」

I 君說：「好，那麼我們來做一張點中次數與前次考試的得分表看一看。」

圖三 英文得分與點中次數



○對區分平均與回歸直線的想法

表(2)

次 數	人 數	範 圍	平 均
0	2	10 ~ 9	95
1	4	9 ~ 6	80
2	7	8 ~ 4	68
3	5	7 ~ 4	52
4	2	3 ~ 2	25
	20	10 ~ 2	65

△區分的平均

○相關表

B 生問：「是相關圖嗎？」

I 生答：「不，是相關表。」

B 生說：「噢，原來如此。看這張表(2)，就能明白看出，下次英文考試，我要好好用功，非拿 100 分不可。像這樣，每 1 科目都被點中名，實在吃不消。」

○讀相關表圖

C 生說：「雖然我們已看出了國文、社會、英文三科的點名順序，但數學科到底怎樣呢。與座位沒有關係，與順序也沒有關係，而與成績又沒有關係。」

B 生說：「奇怪，數學老師每次點名時，總要拿出那本小手冊來，這一定是有什麼名堂……。」

第 3 場：同一班級上數學科時

A 生問：「老師，我們對您在授課時的點名次數與順序作了一次調查，對其他各學科大體上已看出來了，只有數學科一科看不出其所以然，是不是有什麼特別的順序？老師，您在點名時，總是要拿出那本小手冊，那是為什麼？」

老師問：「你們做了一次很有意義的調查，但是做這些調查，要幹什麼？」

B 生說：「國文老師是從男生起，社會科老師是從前幾排的男生起，英文老師

是從成績不好的，順序地去點名的，數學到底是怎樣去點的？」

老師問：「有沒有數學的點名次數的表？」

I 生答：「有，我們已經做好了，就是這一張。」

表(3) 數學科點名次數與人數

次數	0	1	2	3	4	5
人數	2	8	2	5	2	1

合計 20 人 40 次

平均：2 次 衆數：1 次

中位數：1.5 次

○次數分配表

老師說：「好，做得很好。」

g 女說：「老師，您不公平，像我已經點中 5 次了，但有的學生竟連 1 次都沒有點中。」

I 生說：「g 小姐，請你等一下。我因為 1 次都未點中，反而不放心，每天都要做預習的功課。還是早點中，早放心的好。」

G 生說：「像我已點中 4 次，但並不保證我再被點中 1 次後，下次就不會再被點中，所以吃虧的，還是次數多的。」

老師說：「原來你們是為了逃避功課，才要我告訴你們點名的順序？因為弄不懂點名的方式，所以每天不得不勤做預習，好，很好，我已達到我的目的了。」

I 生說：「老師，我們不是為逃避功課，每次功課我們都是認真去做的。老師您手冊中寫的是什麼，請告訴我們，好嗎？」

A 生問：「難道老師的點名是亂七八糟，毫無順序嗎？」

老師答：「對極了，就亂七八糟，毫無順序的。」

A 生說：「但是老師要點名時，老是先看看手冊，難道手冊中寫的也是亂七八糟的嗎？」

老師答：「對，寫有亂七八糟的數字的表，我就是用這亂數表去點名的。」

A 生問：「亂數表是什麼，寫有亂七八糟的數字的表嗎？」

老師說：「像表(4)就是一張將十位數的數字，毫無規律地順序地排列著的表。」

我就是用這張表去點你們的名。」

○亂七八糟的意義

○亂數是什麼

表(4) 亂數表（教育部統計數理研究所）

76	53	00	23	51	56	24	75	93	80	34	48	40	33	78	11	34	02	92	73
07	89	01	75	36	40	00	14	91	07	64	90	23	51	75	07	35	75	25	26
88	30	76	08	33	22	58	14	45	98	06	82	25	51	84	36	54	27	92	70
40	83	23	87	73	80	99	93	88	58	84	99	87	74	65	81	47	20	74	39
46	77	45	34	66	74	04	10	37	61	63	45	06	37	88	02	53	68	73	01
86	99	50	85	99	99	42	51	88	31	03	02	84	10	57	89	67	64	04	65
75																			
6	19	10	5	19	19	2	11	8	11	3	2	4	10	17	9	7	4	4	5
99 ÷ 20 = 4 19 (餘數)																			

老師說：「將從這張表的“56，24……起……08，33”的40個數字，像在該表下段所示，除以20之餘，照著你們的號碼，由前排右邊起，依B君、A君、b小姐、D、C、c、d……以0、1、2、3……的順序去叫名的，所以沒有辦法先測預測的。在數學上來說，是以不能預測的方式，去作點名的。」

A生說：「這樣說來，我就是名列前茅，全班第一了。好不神氣，哈哈。」

B生說：「可是，名次號碼與成績好壞是沒有關係的。」

老師說：「讓我們寫下一個40次的點名中，來查看被點中順序的人。加上一個40次，去作成表看一看。」

C生說：「是的……，做好了，像這一張表(5)。」

老師說：「好，那麼我們來計算平均值與標準差。」

表(5) I (最初的40次)

次數	0	1	2	3	4	5
人數	2	8	2	5	2	1

II (其次的40次)

次數	0	1	2	3	4	5
人數	3	7	2	4	3	1

表(6) 平均2次

平均2次

標準差 1.32

標準差 1.45

I, II的合計(80次)

次數	0	1	2	3	4	5	6	7	8
40次的平均	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
人數	0	2	5	4	0	3	3	1	2

平均4次，平均40次的標準差 1.17

200次

次數	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
40次的平均	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2
人數	1	0	3	1	3	4	2	2	3	0	0	1

平均10次，平均40次的標準差 0.363

老師說：「如計算到200次，便成為如上的表。」

A生說：「這裏所說的40次的比例，是指第一次的相對次數嗎。」

老師答：「你已注意到應該注意的地方了。但以次數去想，當然會出現偏差，應以比例去想才行。」

I生說：「以比例去看，範圍變小了。而用這亂數表去點名，以長程來說，也變成公平了。」

老師問：「標準差可用在什麼地方？」

I生答：「分配是……山形的左右相稱之形。如以標準差的3倍為準，比這更離開平均，那就很稀奇少有了。」

○亂數表的使用
方法

○相對次數的意義

○標準差的使用
方法

○大數的法則

B生說：「但次數在40次時，全部都成為稀奇的學生了。」

A生說：「那是因為次數太少之故。」

I生說：「從200次的表來看，平均是10次，離開準備差3倍以上的，只有被點中16次的j小姐1人變成稀奇的學生。」

j女說：「什麼？我是稀奇的例子？討厭！」

C生問：「因學生有20人，稀奇的標準為0.5%，則 $20 \times 0.005 = 0.1$ （人），老師，這樣不是太多嗎？」

I生答：「這還是因為次數太少的關係。」

老師說：「對，次數愈增多，稀奇之例便愈減少，可以這樣去想的。」

j女問：「老師，那麼只要等到學期末，就會變成公平，是真的嗎？」

I生答：「如果以相對度數去計算，可以這樣說的，但這並不是指點中次數是相同的。」

j女說：「最好，請不要再點中我。」

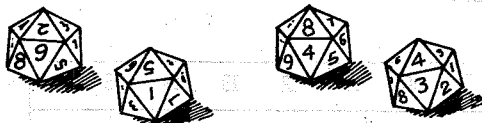
A生說：「既然曉得那張表(4)的密訣，只要在事先看一看，不是就能逃避被點中嗎？」

老師說：「那麼我就改用那張亂數表的其他部份，或者使用一種亂數骰子。」

A生問：「什麼叫做亂數骰子？」

老師答：「是一種正20面體的骰子，在其各個面上寫有從0至9的數字的各兩個字，可以用來做亂數之用。」

A生說：「那麼，我們豈不又將變成無法可想了，除非天天都要好好地去做預習。」



圖四 亂數骰子的圖片

第四場：當天下課後，在同一教室內。

A生說：「今天體育活動之後，又另有集會，晚上我無法用功。I君，請你查一查我明天被點中的比率好嗎？」

I生答：「明天有數學、社會、英文三科，數學被叫到假設為5人，那麼你被叫到的機會有 $\frac{1}{4}$ 。你在上一次英文考試得70分，這次被點中的機會大概是 $\frac{1}{5}$ 。至於社會科的點中率，從你的座位來說，最多是 $\frac{1}{5}$ 。由這去計算，如使用餘事象的機率，就是

$$1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{13}{25} = 0.52$$

所以在這三學科中，你被點中1科的機率有5成以上。」

〔作者現職：國立臺灣師範大學數學系副教授〕

（未完待續）