

青少年世界中的數學* (一)

Raul Rosenbloom 著

黃敏晃 譯

一、為什麼要教數學

為了使社會在下一代能有良好的發展，人類組織了教育體系，並且決定怎樣的科目應該列入學校課程。為得到明智的上述決定，我們必須考慮這樣的問題：社會需要些什麼人材，才能得到良好的發展？身為未來社會主人翁的學生應具備怎樣的知識與技能，才能在未來的社會中生存？這些決定不但會影響到社會與學生心智的發展，同時必然也會指出未來社會的發展方向。

這樣的決定，即使對很原始的社會，也有極大的影響。有名的人類學家米德（Margaret Mead, 1901 ~ 1978；最近過世，1978年11月27日的時代周刊花了整頁的篇幅介紹她的一生與她的貢獻）曾經提到這樣的一回事：當她在1920年代後期訪問新幾內亞的Manus族時，她發現這些原始土人經常為「我欠你什麼，你欠我什麼……」等的複雜債務問題吵架，甚至動武。但25年後，當她再度訪問他們時，她發現社會一片和祥，債務問題不再引起口角。她把這個功勞歸於義務教育——受過教育後，大部份的人學會了算術與記帳，於是債務不再是擾亂社會安寧的問題。

現在的社會由於科學技術的進步神速，所以是人類有史以來，變動最快也最大的社會。甚至於連25年後的社會，會是怎麼個樣子，我們也只有非常模糊的輪廓。在這種情況下，教育的方向變成了一個難題：我們無法預測，那些知識與技能是未來的社會所需要的！學生在學校學到的，

大部份是當時社會還需要的知識與技能，但幾年後當學生步出校門進入社會時，這些知識技能就已是落伍的啦。我們只能確定一件事，即未來社會的變動只會越來越快，越大，各行各業所用到的專門知識與技術將會日新月異，所以每個人都得「活到老，學到老」。因此，我們能教給我們的學生的最有用的東西，應該是活到老學到老的學習動機與學習方法。

學習動機應該同時有其外在的與內在的因素：學生應該能立即應用到他所學到的知識與技能，來解決他所碰到的問題，因而得到他所喜歡的報酬，這是外在的因素；但同時他也應該能體會到，學習本身是有趣的、迷人的事情，使他喜歡學習，這是內在的因素。

學習動機的內在因素，實際上是很重要的。因為學生需要學習的許多知識與技能中，有許多是其外在的報酬不能立刻兌現的，或是他們難以理解的。譬如說，一個十幾歲的小孩，並無法理解到代數在工程或經濟學上的應用。我們也不知道那些小孩將來會需要用到代數，來解決他們將來會碰到的問題，如果等到他們知道他們需要代數時，我們再來教他們代數，那社會上就會很缺工程師與經濟學家。所以，我們所能採取的最佳策略，莫過於把代數表達的生動、有趣，用以激發並培養學生強烈的內在學習動機。

我們利用下面由1元或（與）5元硬幣湊錢的例子，來顯示「如何學習」的步驟。例如，經過實際的動手擺弄後，學生不難看出16元有下表所顯示的四種湊錢法。

* 本文取材自The Spirit and the Use of Mathematical Science一書。此書是由15位名家各貢獻一篇文章，由Thomas Saaty與Joachim Weyl編輯而成，McGraw-Hill書局出版。因本文甚長，詳文長達二萬字，所以分成6次在本刊連載登出。

5 元硬幣數	0	1	2	3
1 元硬幣數	16	11	6	1
共有的元數	16	16	16	16

上表的組成，顯示了一個基本的學習方法，即應該把觀察的結果作成有系統的記錄。這裏是按照 5 元硬幣數目的增加方式來記錄的，這樣我們就能記錄出所有的湊錢法，而且不致於重覆。

上述的說明更進一步的暗示了，我們應該把錢數與湊錢法，製成一個有系統的表以供觀察。作成下表後，我們就能很清楚的看出一些變動的型態 (pattern)：湊錢法只在元數為 5, 10, 15, ……時增加 1，其他時候是沒有變化的，例

錢數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	……
湊法	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	……

如 14 元或 11 元的湊錢法，與 10 元的湊錢法一樣多。所以，這樣的表只要把錢數為 5, 10, 15, …等的情形表達出來就夠了。如果把 0 元的情形 (0 元只有 1 種湊錢法，即 0 個 1 元硬幣，0 個 5 元硬幣) 也加進去，就可以得到下列包含更多情報資料的表格。

錢數 n	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	……
湊錢法 $f(n)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	……

學過代數的讀者，不難寫出其一般結果如下：若 $n = 5x + r$ ，其中 $0 \leq r < 5$ ，則利用 1 元或 (與) 5 元硬幣湊成 n 元的方法有 $f(n) = x + 1$ 種 (譯者註：目前我國的高中學生都已知道所謂的高斯函數符號 $\{x\}$ ， $\{x\}$ = 不大於實數 x 的最大整數，利用這個函數符號， $f(n)$ 的表達可以簡化成 $f(n) = \{ \frac{n}{5} \} + 1$)。

現在讓我們把這個問題推廣一下：假定不但

可以用 1 元與 5 元硬幣，同時也可以用 10 元紙幣來湊錢。例如，下表顯示了共有 9 種方法湊成 20 元。注意到此表的記錄方法，是按 10 元紙幣數目增加的方式而排列的，而當 10 元紙幣的數目相同時，則按 5 元幣數目的增加而排列。我們並可仿

10 元紙幣數	0	0	0	0	0	1	1	1	2
5 元硬幣數	0	1	2	3	4	0	1	2	0
1 元硬幣數	20	15	10	5	0	10	5	0	0
共有的元數	20	20	20	20	20	20	20	20	20

上述的例子，把元數與湊錢法列在同一表上如下，其中 $g(n)$ 是用 1 元、5 元硬幣與 (或) 10 元紙幣來湊成 n 元的方法數。

n 元	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	……
$f(n)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	……
$g(n)$	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36	42	49	56	64	……

讓我們看看 $g(n)$ 是如何算出來的。首先分析湊成 20 元的方法數如下：如果不用 10 元紙幣，則 20 元統統得用 1 元與 (或) 5 元硬幣來湊，湊法共有 $f(20) = 5$ 種；如果我們只有 1 張 10 元紙幣，則剩下來的 10 元就得用 1 元與 (或) 5 元硬幣來湊，湊法共有 $f(20 - 10) = f(10) = 3$ 種；如果我們用了 2 張 10 元紙幣，則已得 20 元，剩下 0 元的湊法只有 $f(20 - 20) = f(0) = 1$ 種；所有 20 元的 9 種湊法是

$g(20) = f(20) + f(10) + f(0) = 5 + 3 + 1 = 9$
由同樣的分析，可得到 30 元的湊法 $g(30) = 16$ 種，如下式

$$g(30) = f(30) + f(20) + f(10) + f(0) \\ = 7 + 5 + 3 + 1 = 16$$

但在上式中 $f(20) + f(10) + f(0) = g(20)$ ，所以上面的計算可簡化成

$$g(30) = f(30) + g(20) = 7 + 9 = 16$$

讀者不難仿照上面的計算方式，把上表中的各 $g(n)$ 值檢查一下，看看筆者有沒有算錯。爲了方便讀者仿效起見，下面我們再算一個例子：求 $g(35)$ 的值

$$g(35) = f(35) + g(25)$$

$$= 8 + 12 = 20$$

這種簡便算法的一般式子是如下的：

$$\textcircled{1} \begin{cases} \text{若 } n < 10, \text{ 則 } g(n) = f(n) \\ \text{若 } n \geq 10, \text{ 則 } g(n) = f(n) + g(n-10) \end{cases}$$

注意到，這是一種遞迴（recursive）式子，換句話說，對於較大的 n 的 $g(n)$ 值，是要依靠對較小的 n 的 $g(n)$ 值來計算的。所以讀者在檢查上表時，若使用這個簡便計算法，則必須由小的 n 開始，然後再檢查大的 n 。

另一個需要注意到的事情是，上表是個簡表。例如，我們並沒有列出 $g(23)$ 是多少。這種作法顯然假定，讀者都很清楚 $g(23) = g(20)$ 。如果讀者自問，而無法對自己給出滿意的答案時，那就應該花點時間想想。

當然，我們可以把這個問題再加以推廣成，利用 1 元、5 元硬幣與（或）10 元、50 元紙幣來湊錢。甚至於更進一步推廣成，利用 1 元、5 元硬幣與（或）10 元、50 元、100 元紙幣來湊錢。相信讀者不難仿照上述的方法，來解決這兩個推廣後的問題，所以我們把它們留給讀者自行處理。

這裏順便提一下，讀文學作品與數學作品的不同。讀一篇小說時，讀者可以採取比較消極的態度，這並不致於妨碍他欣賞這篇小說。但讀者要欣賞一篇數學作品時，就一定得採取比較積極的態度，即拿出紙與筆來計算，跟着著者走，才不致迷失。所以，我們希望讀者現在立即採納我們的建議，拿出紙與筆把上表中各 $g(n)$ 的值計算一下，甚至把上述的兩個推廣問題也算一下。

在上述的例子中，我們採取了兩種主要的方法來得到知識。首先，我們採用了歸納法，來歸納實驗與觀察的結果。當我們把這些結果作成有系統的表後，我們發現了型態，而這些型態使我們能預測實驗的結果（例如 $g(35) = 20$ ）。然後我們採用演繹法，推得了下列的一般性結論：

$$\textcircled{2} \begin{array}{|l} \text{用 1 元、5} \\ \text{元硬幣與（} \\ \text{或）10 元紙} \\ \text{幣湊成 } n \text{ 元} \\ \text{的方法數} \end{array} = \begin{array}{|l} \text{用 1 元與（} \\ \text{或）5 元硬} \\ \text{幣湊成 } n \text{ 元} \\ \text{的方法數} \end{array} + \begin{array}{|l} \text{用 1 元、5} \\ \text{元硬幣與（} \\ \text{或）10 元紙} \\ \text{幣湊成 } n-10 \text{ 元} \\ \text{的方法數} \end{array}$$

這個結論使我們能得到下列的兩種新的知識

- 1 我們能把上表中第三行的 $g(n)$ 值統統求出來，不再需要作實驗與觀察。
- 2 我們能夠仿照這裏用到的方法，解決推廣後的問題（指上述留給讀者自行處理的兩個問題）。

在學校課程的安排中，歸納方法主要放在自然與社會課目中，而演繹方法則放在數學課中。筆者個人以爲，這樣的安排並不是最明智的決策。我們應該在數學課中，安插一些教材，使學生能把這兩種主要的求知方法，結合起來使用，以獲得新知識。這樣的教育才會是比較完整的。

這裏我們還得再提一件事，即舊知識的獲得主要靠學習者的聽與讀，這就牽涉到語言的使用問題。現在主要的科學語言是數學，若不使用數學，則大部份的（至少比較深的）科學現象與結果，幾乎就無法描述清楚。譬如說，上述的式子用日常生活語言，是非常囁嚅的②式，但對一位學過代數的讀者，簡單的①式就很清楚了。

使用數學語言，不但現象與結論的描述會比較清楚，甚至由此而得到的演繹也比較容易些。數學語言，可以看成爲腦袋中的實驗室設備，即使是使用日常生活語言時，只有天才才能得出來的演繹推論，平常人也能用數學語言得到。

由此看來，數學語言與數學所能顯示的方法，是獲得知識的主要成份，而能隨時隨地學習必要的舊知識，並獲得新知識的能力，則是每個小孩將來長大成人後，能在未來激變的社會中生存的必備條件，這就是數學這門課程，所以會在現代教育體系中一定非出現不可的理由。

〔譯者現職：國立臺灣大學數學系教授〕