

路線之探討

賴敦生

一、前言

路線是一組組曲線的連結，此處所研究者乃是走法個數，及一筆連續不重複而繞完全部圖形的方法數（俗稱一筆畫）。由於排列組合對於研究數學至為重要，然而對多數初學排列組合的人而言要領悟箇中道理頗不容易。筆者有鑒於此，特著本文用淺顯的路線圖對應排列組合中所欲統計的函數。因數之個數，因數之積之求法解釋，組合總數的利用，一一加以詳述。對於一筆畫某些非常頭痛而無法作科學統計的方法數歸納出一個新公式（利用重複組合的理論），筆者相信這些探討的方式深值初學排列組合（或學過而仍混亂不清）的人感覺有所助益而徹底領悟，尚且可從實際世界中體驗數學之真諦。

二、路線之探討

1. 不可折回的路線

設由甲地至乙地有 3 條路線，乙地至丙地有 2 條路線，則甲地經由乙地至丙地之方法數（路線數）為 $3 \times 2 = 6$ （條）

說明：



設甲至乙之路線集合為 $A = \{a, b, c\}$

乙至丙之路線集合為 $B = \{1, 2\}$

甲經乙至丙的方法有 $(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1),$

$(c, 2)$ 計 6 條恰為 $A \times B$ 之元素個數。

推廣：①若甲至乙有 m 條，乙至丙有 n 條，

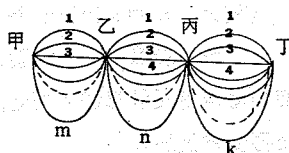
丙至丁有 k 條，則甲經乙、丙至丁有 $m \times n \times k$ 條路線可走。

甲經乙至丙有 mn 條路線，而每一路線要從丙至丁又有 k 法， mn 條中每條均有 k

法故共有

$$k + k + \cdots + k = mnk$$

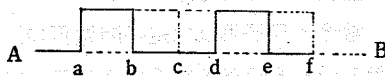
mn 個



這是一個很容易理解的事實，我們據此來了解數學上的應用問題。

1° 如下圖（甲）由 A 至 B，不折回，但未必取捷徑方法的個數轉化為（乙）的路線來解釋

（甲）



（乙）

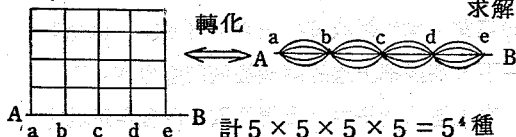


在（甲）圖中縱段其實可以壓成一結點如（乙）圖而每一不折回的路線恰與（乙）圖中之任一路線在走法上是一樣的，故方法數是

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 \text{ 種}$$

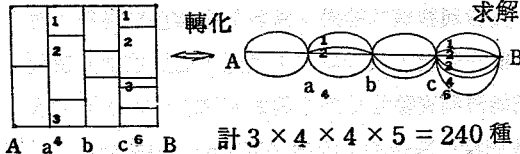
推廣：求下列各圖中由 A 至 B 不折回，但未必取捷徑之方法數。

（甲）

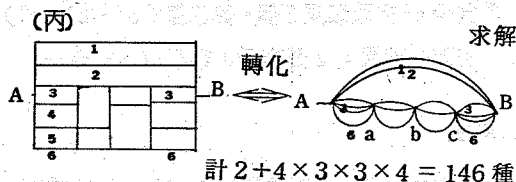


轉化 求解
計 $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$ 種

（乙）

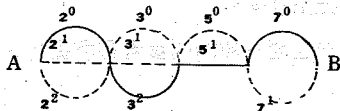


轉化 求解
計 $3 \times 4 \times 4 \times 5 = 240$ 種



2° 以路線解釋因數問題

說例： $1,260 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ 之所有正因數與下列路線相對應



- (i) 由 A 至 B 每一路線均由 4 段組合，每段都有它的代數。（這些代數正是 1,260 的質因數及質因數的乘幂）

今由 A 至 B 之路線如上圖實線的路線其代數積為 $2^0 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^0 = 45$ 一定是 1,260 之正因數，即每一路線代表一正因數，故共有 $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$ 個正因數。（亦即是全部的路線數）

- (ii) 所有正因數之積的求法：

通過 2^1 之路線計有	$3 \times 2 \times 2 = 12$ 條	①
2^2 "	$3 \times 2 \times 2 = 12$ 條	②
3^1 "	$3 \times 2 \times 2 = 12$ 條	③
3^2 "	$3 \times 2 \times 2 = 12$ 條	④
5^1 "	$3 \times 3 \times 2 = 18$ 條	⑤
7^1 "	$3 \times 3 \times 2 = 18$ 條	⑥

∴ 這些路線所表之正因數之積

$$\begin{aligned}
 &= 2^{12} \times (\text{非 } 2 \text{ 之倍數}) \cdots \cdots \text{由①} \\
 &= (2^2)^{12} \times (\text{非 } 2^2 \text{ 之倍數}) \cdots \cdots \text{由②} \\
 &= (3^1)^{12} \times (\text{非 } 3 \text{ 之倍數}) \cdots \cdots \text{由③} \\
 &= (3^2)^{12} \times (\text{非 } 3^2 \text{ 之倍數}) \cdots \cdots \text{由④} \\
 &= (5^1)^{18} \times (\text{非 } 5 \text{ 之倍數}) \cdots \cdots \text{由⑤} \\
 &= (7^1)^{18} \times (\text{非 } 7 \text{ 之倍數}) \cdots \cdots \text{由⑥}
 \end{aligned}$$

故所有正因數之積

$$\begin{aligned}
 &= 2^{12} \times (2^2)^{12} \times (3^1)^{12} \times (3^2)^{12} \\
 &\quad \times (5^1)^{18} \times (7^1)^{18} \\
 &= (2^2)^{18} \times (3^2)^{18} \times 5^{18} \times 7^{18} \\
 &= (2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7)^{18}
 \end{aligned}$$

$$= (\text{原數})^{\frac{\text{正因數個數}}{2}}$$

推廣： $N = 2^m \cdot 3^n \cdot 5^p$ (N 以質因數之乘方表之， $m, n, p \in \mathbb{N}$)

其正因數個數 $(m+1)(n+1)(p+1)$ ，

$$\text{其正因數之積} = N^{\frac{\text{正因數個數}}{2}}$$

3° 以路線解釋函數的個數

設 $A = \{a, b, c, d\}$ ， $B = \{\text{甲}, \text{乙}, \text{丙}\}$ 則能定出由 A 映至 B 之函數個數。設 a, b, c, d 四組路線各在其下方選一段組成由 A 至 B 之一路線，每一路線定出一由 A 映至 B 之一函數如圖中所示：



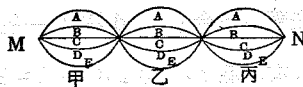
實線路線其相應的函數為： $a \rightarrow \text{丙}$ ， $b \rightarrow \text{乙}$ ， $c \rightarrow \text{甲}$ ， $d \rightarrow \text{丙}$ 。

故能定出 A 映至 B 的函數個數為

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 \text{ 個}$$

4° 解釋重複排列問題

有甲乙丙三人欲乘 5 部計程車，（編號依序 A, B, C, D, E）三人可同乘一部車，但不許有人沒車乘，則其方法數可用下圖解釋：



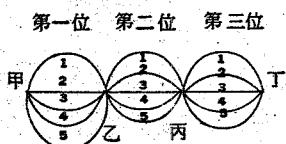
甲、乙、丙可在上方 5 部車中任選一部，每一種選法就是一條 M 至 N 的路線，故方法數為 $5 \times 5 \times 5 = 5^3$

* 這個解法給與初學排列組合學生最易了解（因為是很實際的事實）。

* 常常可以看見學生的解法是： 3^5 ， $H(3, 5)$ ， $H(5, 3)$ ， $C(5, 3)$ ， $P(5, 3)$ 等混亂的觀念。

5° 解釋普通排列的定義： $P(5, 3) = 5 \times 4 \times 3$ 如 5 人選 3 人排成一列方法數為 $5 \times 4 \times 3$ ，

以下圖解釋：



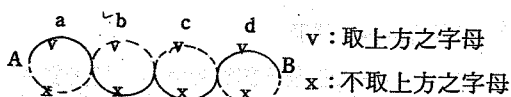
每一排列法相當於左列由甲經乙、丙至丁的路線，每路線由三段組成，如甲至乙有 5 段可走，若取一段（代號 1, 2, 3, 4, 5 之一）則乙至丙就不能重複選同號路段，故只有 4 法，丙至丁就不能取與前面二段同號路段，故方法只有 3 種，而路線總數計有 $5 \times 4 \times 3$ 亦就是 $P(5, 3)$ 的道理。

6° 組合總數的解釋

① n 個不同物每次至少取一個，至多取 n 個（一次）共有之方法數（謂之組合總數）。

$$\text{爲 } c(n, 1) + c(n, 2) + \cdots + c(n, n) = 2^n - 1$$

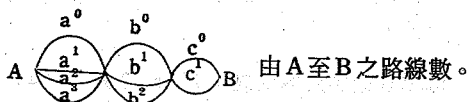
說例：集合 $A = \{a, b, c, d\}$ 之所有非空集合對應一種組合法亦對應下列圖形之一路線（統計路線數就是統計所欲求者）。



如其中若有一由 A 至 B 之路線（實線部份）爲 $ab cd$
 $vxxv$ 表部份集合 $\{a, d\}$ 就是一組合法。除全不取外共有路線 $2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1 = 2^4 - 1$ 種。

② p 個同物， q 個同物， r 個同物……，每次至少取一件之組合總數爲 $(p+1)(q+1)(r+1) - 1$

說例：蘋果 3 個，李子 2 個，梨 1 個，每次至少取一個，組合總數爲 $(3+1)(2+1)(1+1) - 1$ ，恰爲下圖中



* 其中 a^2 表取蘋果 2 個，像路線 (a^1, b^2, c^0) 表取一蘋果，2 個李子，梨不取之組合法。

2. 筆畫

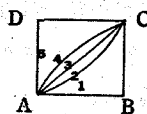
本文的用意係針對坊間參考書無法解說或不容易領悟的理論用淺顯的方法，嚴密而有系統之思考方式述說，並再推出一新公式（以重複組合的理論推出）。

下面先整理一般坊間參考書所提的一筆畫問題：

定義：將一圖形之各段一筆連續（但各段不得重複描繪，然各段之交點可重複通過）畫完全部圖形謂之。

1 奇頂點，偶頂點；圖形之一頂點由奇（偶）數段會合謂之奇（偶）頂點。

如：



頂點 A, C 各由 5 段會合是爲奇頂點。

頂點 B, D 各由 2 段會合是爲偶頂點。

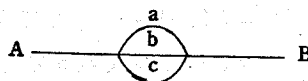
2 何種圖形可以一筆畫成？

尤拉定理：

- ① 圖形全部各頂點均爲偶頂點，則可以任一偶頂點爲出發點一筆畫成歸回原點。
- ② 圖形恰有 2 個奇頂點，其餘均爲偶頂點，則可以一奇頂點爲起點一筆畫成至另一奇頂點（爲終點）。

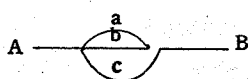
今對一圖形可否由一筆畫成的問題省略討論，因爲坊間的參考書已經討論過。我謹迅速的介入主題——圖形能一筆畫完之方法數的討論。

說例：(I)

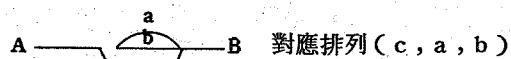
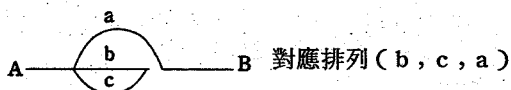


上圖由 A 至 B 一筆畫完之方法數就可視爲 a, b, c 之排列數。

如：對應排列 (b, a, c) （依先後次序出現）



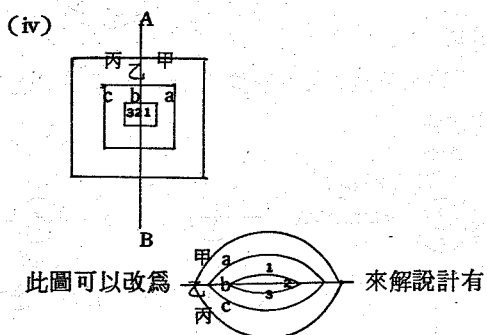
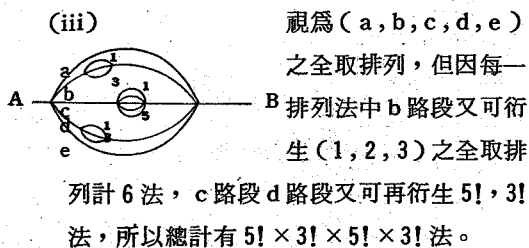
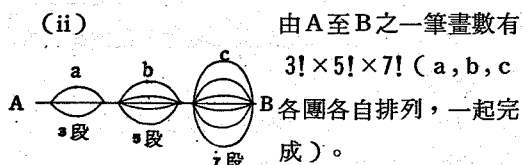
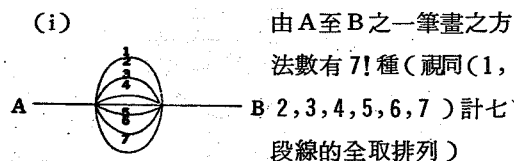
由 A 出發先走 b 段再走 a 段而 c 段完成一筆畫



尚有 (a, b, c), (c, b, a), (a, c, b) 三種排列

故由A至B之一筆畫個數有 $3! = 6$ 種 (其實就是 a, b, c 三字全取排列 $3!$ 種)

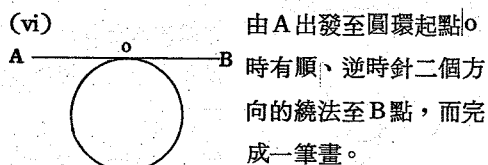
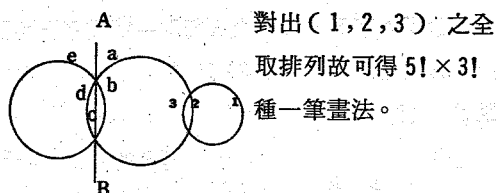
推廣：求下列各款之由A至B之一筆畫數



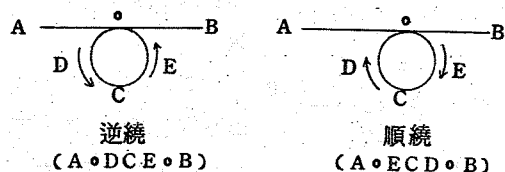
$3! \times 3! \times 3!$

這是因甲、乙、丙之每一排列法中乙段可衍生 (a, b, c) 之全取排列法 $3!$ 種, 而 b 段中復生出 (1, 2, 3) 之全取排列法故計有 $3! \times 3! \times 3! = (3!)^3$ 種一筆畫法。

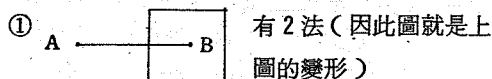
(v) a, b, c, d, e 之全取排列於 a 段同時



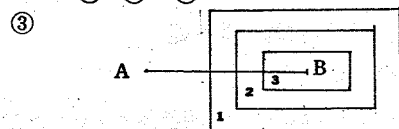
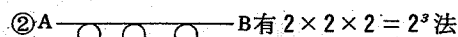
所以由A至B之一筆畫數有 2 法說明圖如下方所示: (箭頭所指方向要和時針繞法比較順或逆)



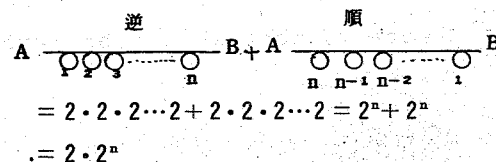
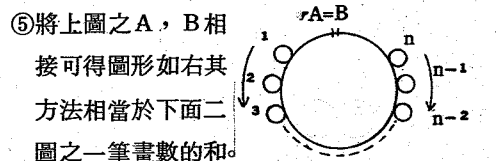
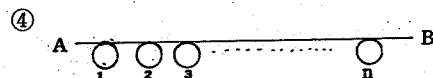
推廣:



(指由A至B之一筆畫法, 以下同此題意)



即與 A B 同形。



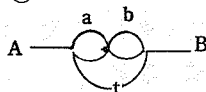
故由A至B，或謂由A起點一筆畫完上圖而歸回A點之一筆畫數為 $2 \cdot 2^n$ 種方法。

說例：(II)

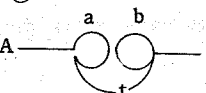
(i) 由A至B的一筆畫統計



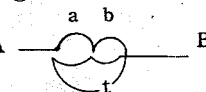
①



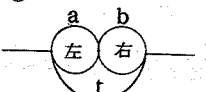
②



③



④



法如下：

假設由A至B凡是去程段我們標明，回程段並不書出。

如：① abt 表示由A出發至左環取一段，就到右環，折回至A再走往程的t段而完成一筆畫。

② atb 表示由A出發在左環繞一圈（不到右環）而走下段之t段至右環繞一圈至B完成一筆畫。

③ abab表示由A出發，走左環一段右環一段再由t段折回（凡折回的段號不書出）再走左環，右環所剩的未走過的段而至B，完成一筆畫。

④我們知道所有的繞法就是：

abab

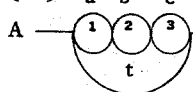
abt, atb, tab相當於t, a, b之全取排列，但a必在b之前。

故方法總數有：

(abab)(左環)(右環)各有順逆2繞法

$$\left(\frac{3!}{2!} + 1\right) \times 2! \times 2! = (3 + 1) \times (2!)^2 = (3 + 1) \cdot 2^2$$

(ii)



由A至B之繞法：

有abcabc及abct, abtc, atbc, tabc

故方法總數有：

$$\left(\frac{4!}{3!} + 1\right) \times (2!) \times (2!) \times (2!)$$

$$= (4 + 1) \cdot 2^3$$

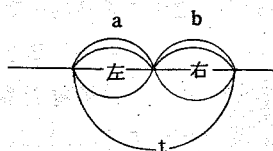
(iii)



有n個環，由A至B之一筆畫數為

$$\left(\frac{(n+1)!}{n!} + 1\right) \times 2^n = (n+2) \cdot 2^n$$

(iv)



左、右兩組線團各有4段組成，各有二個去程，二個回程，全程光是走這二團的8段路線共有 $4! \times 4!$ 種。

但我們是如何的分配呢？方法是這樣：

aabb abab abbat

aabbt ababt tbaab

aabtb abattb

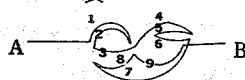
aatbb abtab

atabb atbab

taabb tabab

$$\text{共有 } 2 \cdot \left(\frac{5!}{4!} + 1\right) \times 4! \times 4! \text{ 種}$$

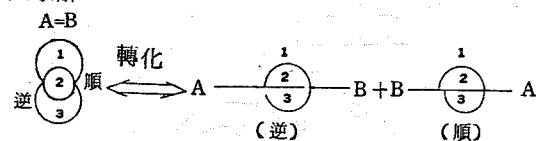
註：aabb表



說例：(III)

(i) 由A至A之一筆畫可將圖形轉化成(乙)

圖求解

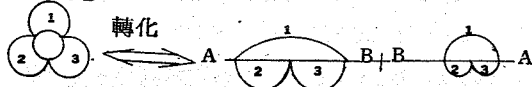


(將A處折斷，變成由A至B，B至A逆順

二法求解)

所以由A至A之一筆畫數=由A至B一筆畫數+由B至A之一筆畫數= $3! + 3! = 2 \times 3! = 12$ 種

(ii) A=B

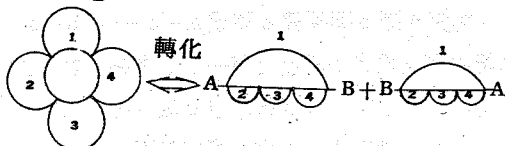


由A至A之一筆畫數=由A至B一筆畫數+
由B至A之一筆畫數

$$= 2 \times \left(\frac{(2+1)!}{2!} + 1 \right) \times 2! \times 2!$$

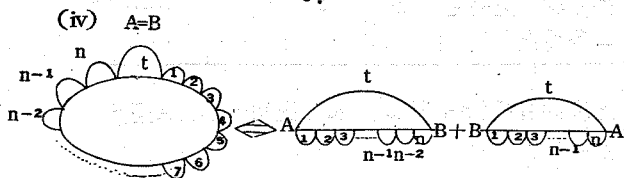
$$= 32$$

(iii) A=B



由A至A之一筆畫數=由A至B之一筆畫數+
B至A之一筆畫數

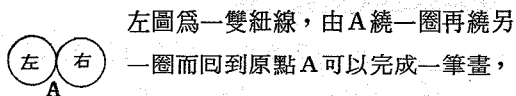
$$= 2 \times \left(\frac{(3+1)!}{3!} + 1 \right) \times 2! \times 2! \times 2!$$



由A至A之一筆畫數=由A至B之一筆畫數+
B至A之一筆畫數

$$= 2 \times \left(\frac{(n+1)!}{n!} + 1 \right) \times 2^n$$

說例：(IV)



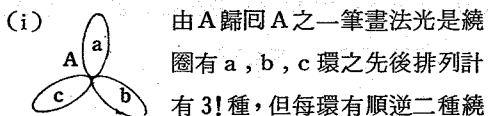
左圖為一雙紐線，由A繞一圈再繞另一圈而回到原點A可以完成一筆畫，
每一圈有順逆二種繞法，故若先左後

右就有 2×2 法，但由右而左亦可以繞故共有

(左)順逆 (右)順逆

$2 \times (2 \times 2)$ 法。

推廣：



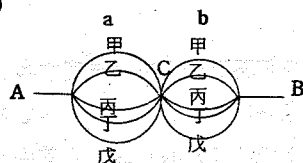
由A歸回A之一筆畫法光是繞圈有 a, b, c 環之先後排列計有 3! 種，但每環有順逆二種繞法，故共有 $3! \times 2 \times 2 \times 2$ 種一筆畫數。

(ii) 於極坐標方程式：玫瑰線： $r = \cos n\theta$ ， $n \in \mathbb{N}$ 。

當 n 為奇數時是 n 瓣玫瑰線有 $n! \times 2^n$ 種繞法。

當 n 為偶數時是 2n 瓣玫瑰線有 $(2n)! \times 2^{2n}$ 種繞法

說例：(V)



從A至B之一筆畫求法如下：

由於一筆畫走完 a 團的五段（甲、乙、丙、丁、戊）因不得重複，故有 5! 種，今欲延伸至 b 團，使 b 團中的 5 段（甲、乙、丙、丁、戊）亦走完，不重複，也是一種排列，計 5! 種（光是在 b 團內的繞法），而 a 團繞完再繞 b 團，或 a 團、b 團交錯繞完全程對於段的排列均各有 $5! \times 5!$ 種可是究竟 a 團要繞若干段，再轉繞 b 團若干段後又回去繞 a 團剩餘部份再至 b 團繞其餘的部份，這種複雜的情形可用下法解釋：

a 團有 5 段，由 A 出發至 c 有三次機會設為 1, 2, 3，由 c 點至 B 點再回 c 點有三種情形：

- (1) b 團走 2 條回 c 再到 A 然後回到 B。
- (ii) 在 b 團內連 4 條至 c 轉 A 再出來至 B。
- (iii) 在 b 團內一次繞完 5 段而完全程。

把上列三種狀況列表如下：

A 至 C 點之次數	1	2	3	註
b 團中供應給由	0	0	4	1*
c 出來在 b 團內	0	4	0	2*
繞線的段數	4	0	0	3*
(完成一筆畫)	2	2	0	4*
	0	2	2	5*
	2	0	2	6*

1* 之說明：由 A 出發第一次走至 C 點折回 A，第 2 次再走到 C 點亦折回，第三次再來到 C 點就讓其在 b 團繞 4 段再走剩餘的一段（在 b 團內）至 B，完成一筆畫。

2* 之說明：由 A 出發第一次至 C 折回 A，第二次至 C 讓其在 b 團內連走 4 段至 C，再走一段（b 團的剩餘未走過的）至 B，而完成一筆畫。

6* 之說明：由 A 出發，第一次至 C，讓其至

b 團走二段回 C 至 A，第二次至 C 時折回，第三次至 C 點處，就讓其在 b 團內選剩餘 3 段之二段折回 C，再由 C 出發走 b 團最後一段至 B，而完成一筆畫。

現在我們再回到上表中究竟有多少個分配方法？這可用方程式： $x+y+z=4$ 之非負整數（且為偶數）解的個數來計算。（其中 x 表第一次 b 團供應的段數， y 表第二次， z 表第三次等等）

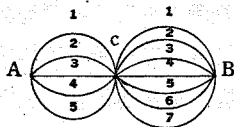
$$\text{即 } \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = x' + y' + z' = 2,$$

對 x' ， y' ， z' 之非負整數解的個數

計 $H(3, 2) = C(4, 2) = 6$ 個

故由 A 至 B 之一筆畫有 $H(3, 2) \cdot 5! \cdot 5!$ 種。

Ex：



由 A 至 B 之一筆畫數，求法如下：

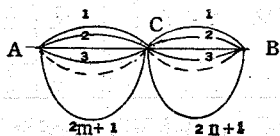
由 A 出發至 C 之次數	1	2	3
由 C 出來到 b 團內走回 C 之段數 (指 b 團之路線)	0	0	6
	0	4	2
	...	...	...

其實上列表內之分配方法數就是 $x+y+z=6$ 之非負整數（但為偶數）解的個數，計 $H(3, 3) = C(5, 3)$ 種。

故由 A 至 B 一筆畫的個數為 $H(3, 3) \cdot 5!$

• 7!

公式 I



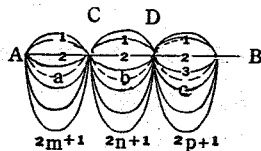
由 A 至 B 之一筆畫數：

$$H(m+1, n) \cdot (2m+1)! \cdot (2n+1)!$$

$$= \frac{(m+n)!}{m! n!} \cdot (2m+1)! \cdot (2n+1)!$$

公式 II

由 A 至 B 之一筆畫數的求法：



先合併 A, C, D 之一筆畫次數為

$$H(m+1, n) \cdot (2m+1)! \cdot (2n+1)!$$

.....以 ⑥ 代之

繞完 a 團 b 團再繞 c 團或 a-b-c-b-a

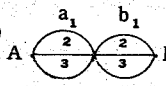
等繞法可視為 ⑥ 中所述之每一方法走到 D 點之次數均有 $n+1$ 次，各次再配以 c 團中的 $0, 2, 4, 6, \dots, 2p$ 段完成一筆畫。列表如下：

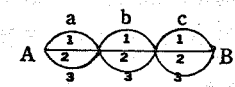
	第一次	第二次		第 $n+1$ 次
由 A 出發已走到 D 進入 C 團所走的段數 (至繞完全程為止)	0	0	...	$2p$
	0	$2p$	...	
	2	4	...	
	...	...	...	

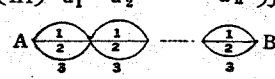
上表共有 $H(n+1, p)$ 種分配法，故由 A 至 B 之一筆畫共有：

$$H(n+1, p) \cdot [H(m+1, n) \cdot (2m+1)! \cdot (2n+1)!] \cdot (2p+1)!$$

* 本公式可推廣 a, b, c 至任何數量的團，其解法可以重複上述的方法，有這二個公式，我們可以想出目前坊間參考書之一筆畫問題有些竟然是本公式的特例。如：

(i)  方法數： $H(2, 1) \cdot 3! \cdot 3! = 2 \times (3!)^2$

(ii)  方法數： $H(2, 1)[H(2, 1) \cdot 3! \cdot 3!] \cdot 3! = 2^2 \cdot (3!)^3$

(iii) $a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n$ 方法數： $2^{n-1} \times (3!)^n$

 (共 n 團)

三、結論

排列組合，一筆畫雖不容易領悟，或容易混淆不清，但透過路線的比喻，我們可以在有形的實例中清晰的看出問題的變化，從而求得答案。

(下接 24 頁)

面，ISIS的活動也沒有忽略以學說和科學事實為基礎，使學生了解現實問題。

四、教學方法

ISIS預定設計一共55個小單元活動教材。每一個小單元活動教材通常都是三個星期的教材。如果以每學期18週計算，一年只需要十二本就夠，可見ISIS讓各校教師與學生有充分的選擇機會。

ISIS的本意為「個別化學習」，程度較高的學生可以在二星期內學完一個小單元，一年下來他可能學到十八個，甚至二十個單元。程度較差的學生，則可以用四星期來充分地、從容地學習他所喜愛，或迫切需要的科學知識。

除了個別化的學習以外，這些教材還可以做為班級教學的教材。例如，由教師選出十二個小單元教材，讓全班學生同時學習。據鮑可曼博士報告：西班牙已選譯ISIS教材中的三十個單元，依其內容分為生物、物理、化學三部分，各含有十個單元教材。等於利用ISIS的教材編成三本高中的科學課本。

此外，為使教師指導與準備方便，亦可同時提供三種小單元，讓學生自選其一來學習。

無論何種方式，ISIS希望教師能活用這些教材，以適應學生（或學校）個別的需要、興趣與能力，使學生們都能獲得日常生活所需要活的知識與技能。

五、感想

ISIS的教材，以「非主修科學」的學生為對象而設計，這一點最值得我們注意。近數年來，我國積極發展科學之餘，也注意到中小學階段的科學教育，但似乎只注意到培養「未來」的科學家。其實要發展國家科學，更應注意「非主修科學」學生們的科學教育，譬如：高中社會學科組的學生，他們將升學大專的文、法、商學院等，他們之中有許多將是政治家、法官、國會議員、工

廠或企業機構的董事會、總經理或工商管理主管，都是具有行政權、決策權的人物，可以說是國家社會實質領導人物，如果他們不懂科學，不懂科學教育，又如何能面對而解決人類社會上種種問題？

ISIS的教材，以人類生活與環境中，種種問題為教材，打破物理、化學、生物等學科界線，以統整科學方式處理，力求適應並發展學生個別的不同能力、性向、興趣，兼顧社會與個人的特別需要，使這些將來不主修科學的學生，具備基本的科學知識，並培養其用科學態度處理問題，運用科學方法解決問題的能力，對於將來不主修科學的高中學生來說，是一套頗值得研究參考的課程。

〔作者現職：國立臺灣師範大學生物系副教授〕

參考資料

1 Individualized Science Instructional System, Ginn and Company, Lexington, Massachusetts, Undated.

2 ISIS, The Florida State University, Doing Minicourses, Ginn and Company, Lexington, Massachusetts, 1977.

3 ISIS Newsletter, 415 North Monroe Street, Room 415, Tallahassee, Florida 32301.

（上接34頁，路線之探討）

固然路線的形狀可以隨意的給與，未必能立時理出一計算公式，但只要耐心，細細的思考、比對、歸納，當可找到正確的解答。甚至於可以自行推出一創新公式，算是對數學研究的一種奉獻。

〔作者現職：台北市立建國高級中學教師〕