合成函數的一種幾何表現

陳昭地

一、前言

在本文中，我們提出不常見到的合成函數之一種幾何圖示方式。這個表現方法雖然有點麻煩，但它可以幫助我們說明函數 f、反函數 f^{-1} 與單位函數 j 之間的相互關係。因此，值得提出來讓大家參考。

二、合成函數的幾何表現

通常，當 $g: X_g \to Y_g$，$f: X_f \to Y_f$ 爲兩個函數時，其中 Y_g，Y_f 各爲 g 與 f 之值域。若 $X_g \cap Y_f \neq \phi$，則對每一 $x \in f^{-1}[X_g \cap Y_f]$ ($f^{-1}[X_g \cap Y_f] = \{x \in X_f : f(x) \in X_g \cap Y_f\}$)，依下列的規則來定義 g 與 f 的合成函數。

$$g \circ f : x \to g(f(x))$$

因此，g 與 f 的合成函數 $g \circ f$ 之定義域 $X_{g \circ f} = f^{-1}[X_g \cap Y_f]$ 爲 X_f 的部分集合，而其值域 $Y_{g \circ f} = g[X_g \cap Y_f]$ 爲 Y_g 的部分集合，因而

$$g \circ f : f^{-1}[X_g \cap Y_f] \to g[X_g \cap Y_f]$$

其常見的圖示如圖一：

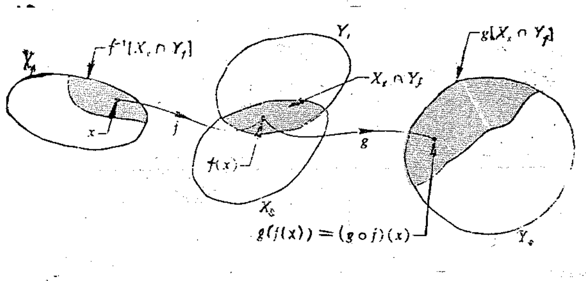

圖 一

當 X_f，X_g，Y_f 與 Y_g 都爲實數部分集合時，我們可以利用三維空間直角坐標系，把 f 的圖形畫在 xz 平面上，g 的圖形畫在 zy 平面上；最後，再把 $g \circ f$ 的圖形畫在 xy 平面上。若以箭頭表示它們的對應關係，得到圖二：

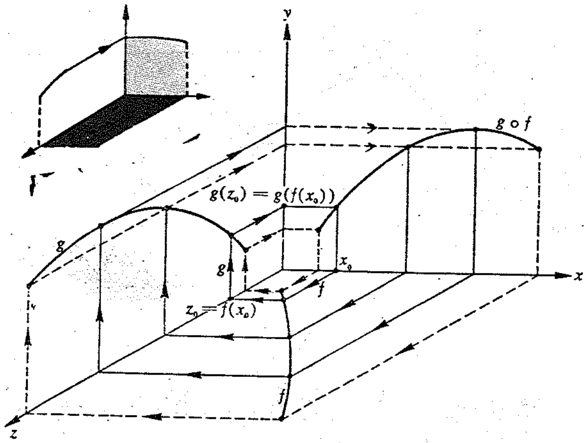

圖 二

特別，當 $f(x) = \sqrt{x}$，$g(z) = -z + 1$ 時，則 $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = -\sqrt{x} + 1$，圖三就是它的一部分圖形：

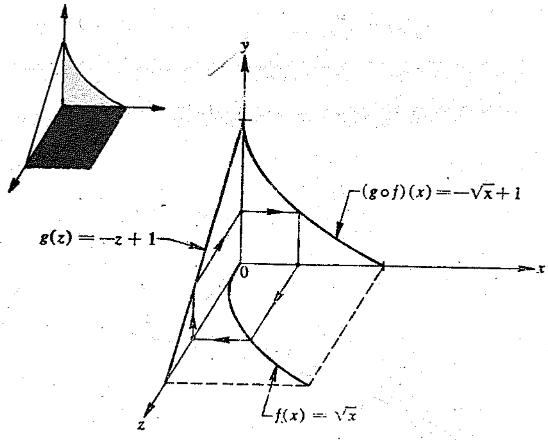

圖 三

另外的一個特別情況：當 $g(x)$ 爲單位函數 $j(x) = x$ 時，則其合成函數 $j \circ f = f$ 之圖示，得到圖四：

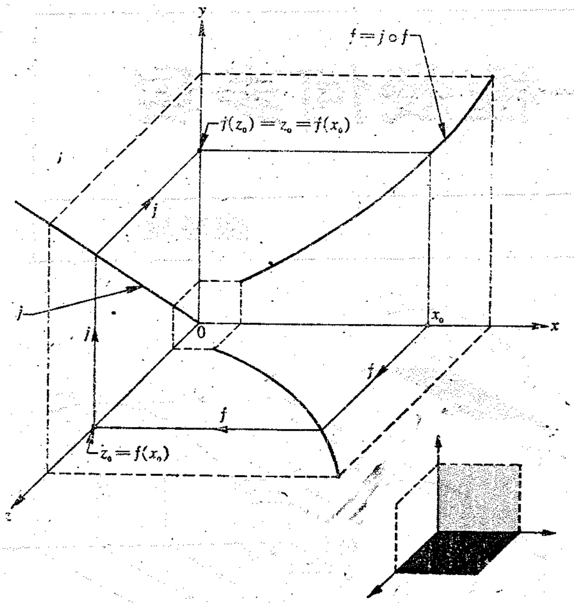

圖　四

最後，當 $f: X_f \to Y_f$ 爲 1－1 函數時，也就是 f 爲以 X_f 爲定義域而值域爲 Y_f 的一對一函數，則可依下列規則來定義 f 的反函數 f^{-1} ：

若 $y \in Y_f$， $f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y$

依此，我們可知 $f^{-1}\circ f$ 與 $f\circ f^{-1}$ 各爲 X_f 與 Y_f 上單位函數，也就是 $f^{-1}\circ f(x)=x$ 對每一 $x \in X_f$ 都成立，

$f\circ f^{-1}(y)=y$ 對每一 $y \in Y_f$ 都成立。

一般在 X_f 與 Y_f 都爲實數部分集合時，f 與 f^{-1} 的圖形與直線 $j(x)=x$ 成線對稱，如圖五所示。

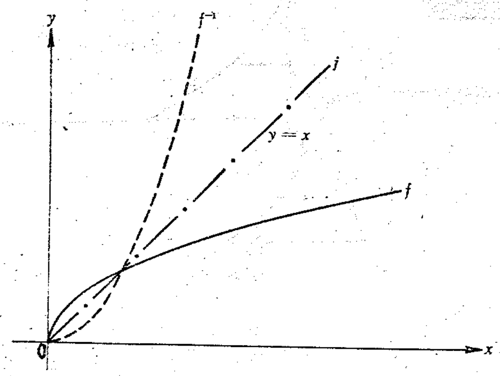

圖　五

特別，在 $f(x)=\sqrt{x}$，$f^{-1}(z)=z^2$ 的情況下，其立體幾何表現如圖六所示。

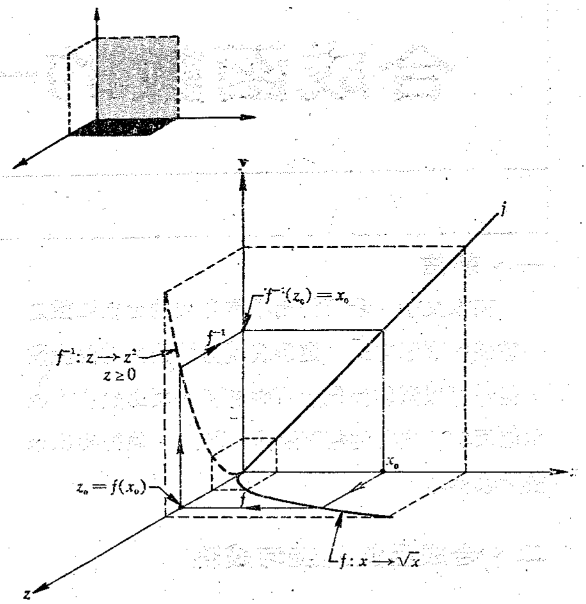

圖　六

三、合成函數的極值

一般而言，定義於區間〔a，b〕的函數 $k(x)$，在 $c \in (a，b)$ 具有**極大值**〔**極小值**〕的意義是存在包含 c 點的開區間 $I \subset$〔a，b〕，使得 $k(x) \leq k(c)$〔$k(x) \geq k(c)$〕對每一 $x \in I$ 都成立，如圖七所示：

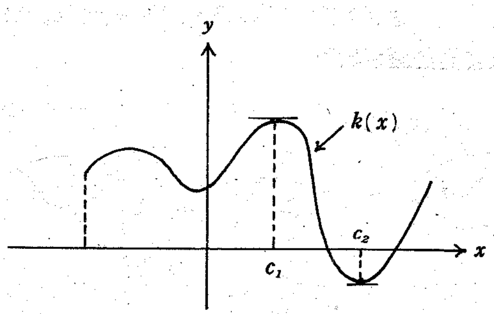

圖　七

由以上合成函數的圖示，似乎暗示著下面的事實：若 $f(x)$ 這點爲函數 g 在 f 的值域上極大值發生之點，則 $g\circ f(x_0)$ 爲極大值。其一般的結果，利用合成函數導函數的**連鎖性質**（The Chain Rule），可以得知：　（下接44頁）

3.研討有關教材與教法之疑難問題。

㈡時間分配：

分區	日　　　期	主 辦 學 校	參加研討人員
北區	67年10月下旬	台北市立 和平國民中學	分區內各實驗學校數學科實驗教師，每校兩名。
	67年12月下旬	台北市立 大同國民中學	
	68年3月下旬	台北市立 華江國民中學	
	68年5月下旬	台北縣立 重慶國民中學	
中區	67年10月中旬	新竹縣立 建華國民中學	同上。
	67年12月中旬	台中縣立 豐原國民中學	
	68年3月中旬	雲林縣立 土庫國民中學	
	68年5月中旬	新竹縣立 建華國民中學	
南區	67年10月上旬	台南市立 大成國民中學	同上。
	67年12月上旬	高雄市立 苓雅國民中學	
	68年3月上旬	台南市立 大成國民中學	
	68年5月上旬	高雄市立 苓雅國民中學	
東區	67年11月中旬	花蓮縣立 花崗國民中學	同上。
	68年4月中旬	花蓮縣立 花崗國民中學	

㈢主辦學校之職責：

1.在舉辦教學研討會前十天發出書面通知邀請有關人員參加研討，其對象包括：(1)師大科教中心，(2)各實驗學校，(3)教育部國教司及該主辦學校所在地之縣市教育局。

2.安排研討會一切場地及用具，研討會活動內容原則如下：

時　　間	活動內容	主　持　人
9:00～9:50	教學觀摩	實驗教師
10:00～11:30	教學研討會	實驗學校校長

3.將研討會記錄整理妥當，在會後兩週內寄達師大科教中心，其餘各實驗學校、教育部國教司及各該縣市教育局。

（上接32頁，$P=4n-1$與$P=4n+1$）

七、結語

利用歐幾里德的方法，我們還可以證明其他一些等差數列中有無限多個質數，例如等差數列

$$4,\ 9,\ 14,\ \cdots,\ 5n-1,\ \cdots$$
$$7,\ 15,\ 23,\ \cdots,\ 8n-1,\ \cdots$$
$$5,\ 13,\ 21,\ \cdots,\ 8n-3,\ \cdots$$
$$3,\ 11,\ 19,\ \cdots,\ 8n+3,\ \cdots$$

等等。但是到現在還沒有人能夠仿照他的方法證明一般的等差數列中也都有無限多個質數。我們只能夠利用解析的方法才能證明它，這就是所謂的Dirichlet定理：在首項與公差互質的無窮等差數列中（各項皆為正整數），必有無限多個質數。對於Dirichlet定理的解析證法有興趣的讀者，可以參看「數論導引」一書或其他有關的解析數論方面的書籍。

〔作者現職：國立臺灣師範大學數學研究所所長〕

（上接34頁，合成函數的一種幾何表現）

(1)當$f(x_0)$為極大值〔極小值〕且$g'(y)$恒正時，則$g\circ f(x_0)$為極大值〔極小值〕。

(2)當$f'(x)$恒正且g在$f(x_0)$為極大值〔極小值〕時，則$g\circ f(x_0)$為極大值〔極小值〕。

參考資料

〔1〕陳昭地、顏啓麟合著，數學分析，汝旭圖書有限公司發行，第二版，1978。

〔2〕Smith, W.K., Inverse Functions, The Macmillan Company, New York, 第三版，1967。

〔3〕Swokowski, Calculus with Analytic Geometry，協進圖書有限公司發行，1977。

〔作者現職：國立臺灣師範大學數學系副教授〕