# 幾何學是什麼？
## ——兼談平面的保長變換

林福來

## 一、中學數學教科書中所定的幾何學

一般中學幾何教科書中，開頭總是介紹點、線、面、體。將一些點、線、面、體畫在空間中，就是幾何圖形。幾何學是研究幾何圖形的性質的科學。三言兩語，好像已經將“幾何學是什麼？”解答了。文章應該就此打住。不過，稍稍深入一想，馬上就會發覺剛剛的解釋根本不嚴密。“性質”這名詞就太過籠統，是不是所有幾何圖形的性質，都要在幾何學中研討呢？顯然不是，例如，上課時，要是老師問學生“這個三角形是黑色還是白色？”，那就太離譜了，因為顏色在幾何學中根本無關緊要。不過光靠這例子就說上面解釋的幾何學意義不嚴密，反證的理由也太薄弱。我們可以再問“怎麼樣的幾何圖形的性質應該在幾何學中研究？”這有沒有嚴格的數學定義呢？幾何教科書中恐怕找不到。學生如果問，同樣是距離問題，為什麼我們要研究三角形一頂點到其對邊的距離，而不討論這頂點到黑板邊緣那條線的距離呢？關於這問題前面解釋的幾何學意義能答覆嗎？

上述的幾何學解釋，雖然漏洞百出，但中學教科書中有可能更嚴密、更詳盡地解釋何謂幾何圖形的性質嗎？不能的。前面的解釋，可說是第一次學幾何的人，唯一能接受的。

## 二、誰？何時？定義幾何學

幾何學的歷史將近4000年，眞正科學的幾何學定義；大約在一百年前，才由德國數學家克萊茵（F. Klein, 1849～1925）提出來，本文的主題就是要根據克萊茵的定義，將中學的幾何學——歐氏平面幾何學，加以闡釋，使我們能把握住中學的幾何所應該探討的內涵。另外，再將我們闡釋過程中所引出的重要概念“保長運動”，作簡單的介紹，分類並談一點點其對處理幾何問題的妙用。

自從紀元前第三世紀希臘人歐幾里得（大約B.C300年）集前人的大成及自己的研究成果寫成幾何原本一書，到西元1830年之前，人類所知道的幾何學只有歐氏的幾何原本中的幾何一種而已。因此在這期間，我們如要回答“幾何學是什麼？”，那只需將歐氏幾何學的內涵及結構加以描述，就是令人滿意的答案。但是到了1830年左右，非歐幾何學中的雙曲線幾何學（〔2〕，註1）創始者的俄國人羅波切夫斯基（Lobachevsky, 1793～1856）及匈牙利人龐禮愛（J. Bolyai, 1802～1860）為了提出一套異於歐氏幾何的新幾何學時（註2），就曾深深體會了定義闕如的痛苦。因為當時一般人沒有“幾何學是什麼？”的概念，他們研創的新幾何學發表時，極少人能瞭解，自然也就沒有他們所期望的“大家都熱烈地討論著”新幾何學的熱潮。雙曲線幾何學的另一位發明者高斯（Gauss, 1777－1855，德）表現的更絕，他在給朋友的信中說他怕當時的人無法接受他的新幾何概念，因此隱藏沒發表他在這方面的成果，緊跟著在第二種幾何學發明後不久，在1854年時，德國的數學家黎曼（Riemann, 1826～1866）又研創了第三種幾何學——橢圓幾何學（〔2〕，註3），各種不同基礎的幾何學蓬勃發展的同時，最迫切需要澄清的“幾何學是什麼？”，自然地由克萊茵所解答了。由於克萊茵的幾何學定義，大家才知道並接受；從不同的基礎出發，可以造出許許多多的幾何學。我們直觀的“幾何圖形”的概念，眞正研究幾何學時，根

本不夠，必須接受新的概念才行。

## 三、幾何性質

（以下所謂的幾何學，都是指中學所談的歐氏平面幾何學。）

現在開始來澄淸，看看那一種幾何圖形的性質，才是我們眞正要硏究的。粗略地說，幾何學硏究的是圖形的“幾何性質”。何謂“幾何性質”呢？先讓我們看看以下這人人都熟的作圖題：

已知三角形的兩邊 $a$，$b$ 及一夾角 $\alpha$，恰可作一三角形。（如圖一）

已知：　　　　三角形

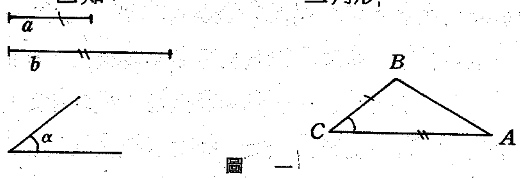



圖　一

但仔細想一想，這作圖題眞確嗎？是不是眞的只能作一三角形呢？且看下圖二。

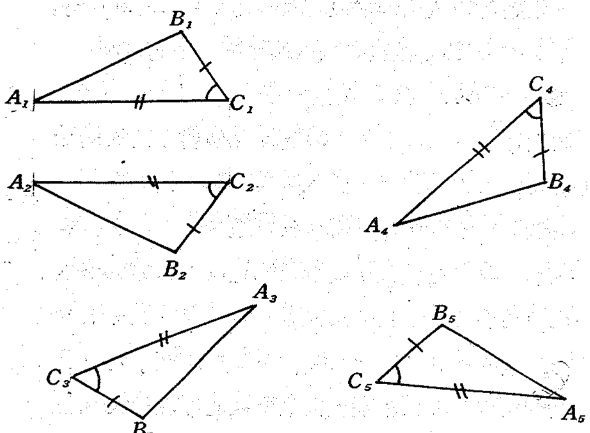



圖　二

上面這些三角形，都有兩邊長分別為 $a$，$b$ 及其夾角 $\alpha$。怎麼可以說只能畫一個三角形呢？“恰可畫一三角形”到底是指怎麼樣的一個？我們知道，所謂唯一的一個是指所有含邊長 $a$，$b$ 及其夾角為 $\alpha$ 的所有全等三角形。也就是說根據全等來分類，每一類就視為一個。因此精確地說，應該是“已知兩邊及一夾角，可以作無窮多三角形，其中任意兩個都全等”。當我們說只能作一個時，我們同意了，三角形如果只有位置相異而已，不該視為不同。因為我們說“幾何學是硏究圖形的幾何性質”的科學。因此圖形必須具有相同的幾何性質，才可視為相同。我們既視全等圖形為同一個，那全等圖形的幾何性質都應該一樣。反之，不全等的圖形一定有某些不同的幾何性質。

故我們可以下“圖形的幾何性質”的定義了：

圖形的幾何性質是指全等圖形所共有的性質。

前面提及的三角形一頂點到黑板邊線的距離；我們所以不硏究，乃是因為全等三角形間的這個距離；可能不相等，所以這距離不是幾何性質。而全等三角形間對應頂點到其對邊的距離都相等，故為幾何性質。

## 四、保長運動

知道幾何性質的意義之後，下幾何學定義的準備工作就差不多了，剩下要先解決的問題是“何謂全等圖形？”

兩圖形全等的意思是說，其中一個圖形在空間中移動後，可以跟另一個圖形處處重合，因此圖形的幾何性質也就是圖形移動後仍不改變的性質。

到目前為止，幾何學可以這樣解釋：

幾何是硏究幾何圖形，任意移動後仍不改變的性質的科學。

但有人還可挑剔地問“移動是什麼意思？”這可以解釋為“移動是指平面或空間的幾何變換，將每一點A變換成一點A′，使得任意兩點A、B間的距離，等於其變換得新點A′、B′間的距離”。簡單地說；移動是指剛體運動，亦即保長運動。因此怎麼樣的運動是保長運動，保長運動有那些特性，就變成是最基本，最迫切需要知道的知識。

實際上，平面圖形的保長變換共有四種，即平移，旋轉，鏡射與平移鏡射。這就是說平面上任意兩個全等的圖形都可利用平移或旋轉或鏡射

或平移鏡射，將其中的一個圖形移到另一個圖形，使兩圖形處處重合。在進一步介紹這四種變換之前。我們已可先根據克萊茵的定義來看“幾何學是什麼？”即：

**幾何學是研究幾何圖形在平移或旋轉或鏡射或平移鏡射四種變換後仍不改變的性質的科學。**

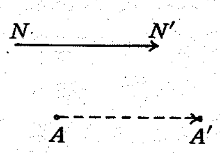
原先克萊茵的幾何學定義（Klein's Erlangen Programme）是說對應於每一種幾何學都有一變換群，該幾何學所研究的就是圖形在其對應的變換群作用後，仍不改變的性質的理論。我們中學研究的歐氏平面幾何學所對應的變換群就是由平移，旋轉，鏡射與平移鏡射所生成的群。

## 五、平移．旋轉．鏡射及平移鏡射

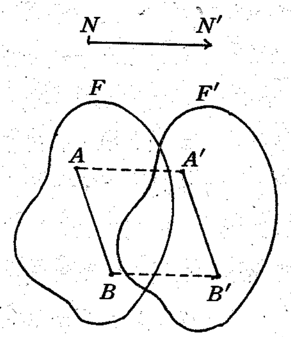
現在回頭來看上述的四種保長變換到底怎樣變換。

1. 平移

設$\overrightarrow{NN'}$為平面上一向量，A為平面上任一點，則$A$沿$\overrightarrow{NN'}$平移所得的像$A'$，滿足$\overrightarrow{AA'}$與$\overrightarrow{NN'}$平行、同向且等長三個條件。如下圖三所示



圖三

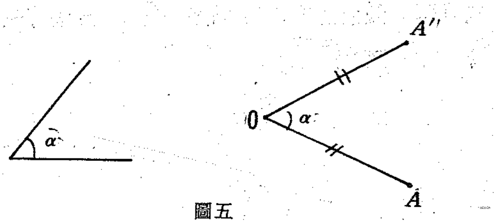


圖四

平面上的一圖形下沿$\overrightarrow{NN'}$平移的像為一新的圖形$F'$，$F$中的任意兩點$A$、$B$與它們在$F'$中的像$A'$、$B'$恰構成一平行四邊形$ABB'A'$，如上圖四所示。

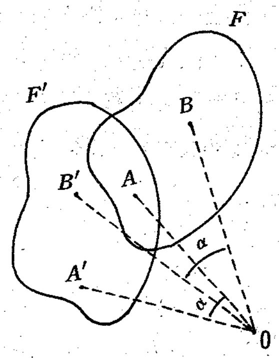
2. 旋轉

設$O$為平面上一點，$\alpha$為一已知角，則平面上任一點$A$繞$O$點旋轉角$\alpha$所得的像$A'$，滿足$OA=OA'$，$\measuredangle AOA'=\alpha$，如下圖五所示。



圖五

設$F$為一平面上的圖形，則$F$繞$O$點旋轉角$\alpha$的像為一新圖形$F'$，如下圖六所示。



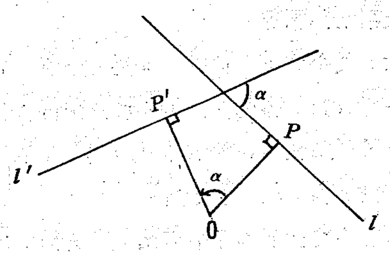
圖六

設直線$l$不過$O$點，則$l$繞$O$旋轉角$\alpha$的像為一直線$l'$，$l'$的作圖法為：

1° 過$O$作$l$的垂線$OP$，$P$為$O$點在$l$上的垂足。

2° 以$O$為頂點，$OP$為一邊作一角$\measuredangle POP'=\alpha$，且取$OP'=OP$。

3° 過$P'$作$OP'$的垂線$l'$，則$l'$即為所求。如下圖七所示。



圖七

3. 鏡射

鏡射就是對稱於一直線的變換。

設 $l$ 爲平面上一直線，$A$ 爲平面上任一點，則 $A$ 對 $l$ 鏡射的像 $A'$，滿足 $l$ 爲 $AA'$ 的垂直平分線，如下圖八所示。

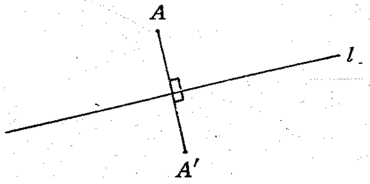



圖 八

設 $F$ 爲平面上一圖形，則 $F$ 對 $l$ 鏡射的像爲一新圖形 $F'$，如下圖九所示，其中 $F$ 中的任意兩點 $A$、$B$ 與它們在 $F'$ 中的像 $A'$、$B'$，恰構成一梯形，$l$ 爲此梯形兩底 $AA'$、$BB'$ 共同的中垂線。

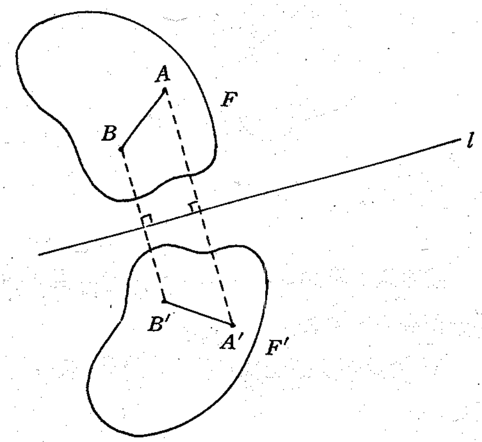



圖 九

4. 平移鏡射

平移鏡射望文生義就知道是指一平移及一鏡射的和，不過這裏的平移，它的移動方向一定要沿著鏡射的對稱軸。

設 $l$ 爲平面上一直線，$a$ 爲一正數。則平面上任一點 $A$ 對 $l$ 移動 $a$ 長的平移鏡射的像爲一新點 $A'$。$A'$ 爲 $A$ 對 $l$ 鏡射的像 $A_1$，再沿 $l$ 的一方向平移 $a$ 長的像，如下圖十所示。

讀者不難從下圖十中看出，$A$ 先沿 $l$ 的一方向平移 $a$ 長再對 $l$ 鏡射的像也是 $A'$。亦即平移鏡射變換中，先平移後鏡射或先鏡射後平移都可以。

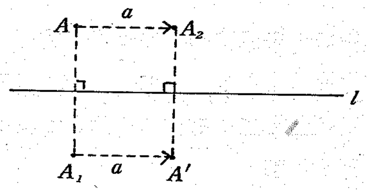



圖 十

設 $F$ 爲平面上一圖形，則 $F$ 對 $l$ 移動 $a$ 長的平移鏡射的像爲一新的圖形 $F'$，如下圖十一所示。

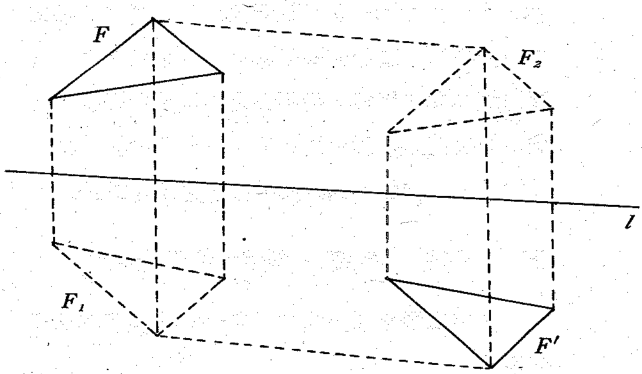



圖 十一

## 六、全等圖形的分類

設 $F$、$F'$ 爲平面上的兩個全等圖形，將 $F$ 移動位置使 $F$、$F'$ 處處重合，可能有兩種情況，第一種是 $F$ 不必搬離所在的平面卽可與 $F'$ 疊合。例如圖四與圖六所示的全等圖形都是這一種。第二種情況是 $F$ 必須搬離所在的平面，在空間作一翻轉之後，才能搬至 $F'$ 的位置，使兩圖重合。例如圖九與圖十一中的兩對 $F$，$F'$ 都是屬於第二種的全等圖形，讀者不妨試看看圖十一中的兩個三角形 $F$，$F'$，如果只在平面上將 $F$ 移動（平移或旋轉），可不可能將 $F$ 疊到 $F'$ 上使兩圖處處重合？

平面上的兩全等圖形必定是屬於上述兩種情況中的一種。我們知道一圖形 $F$ 經過平移或旋轉後的像 $F'$；$F$、$F'$ 是屬於第一種全等。圖形 $F$ 經過鏡射或平移鏡射後的像 $F'$；$F$ 及 $F'$ 則是屬於第二種全等。反過來看也成立，就是說如果 $F$、$F'$ 是第一種全等圖形，那麼 $F'$ 一定是 $F$ 經一次平移或旋轉後所得的像。如果 $F$、$F'$ 是第二種全等圖

形，那麼$F'$一定是$F$經一次鏡射或平移鏡射後所得的像。綜合這兩種結論，就得“平面圖形的保長變換恰爲平移，旋轉，鏡射及平移鏡射四種”。

## 七、等長變換的應用

等長變換除了用來解釋幾何學的定義外，當我們處理一般幾何問題時，等長變換也是相當銳利的工具。在此舉三個例子來看它們的使用法。

〔1〕：造橋問題

設有兩城鎭$A$、$B$被一條河所隔開，欲造一座橋橫跨河的兩岸以溝通$A$、$B$兩鎭，如圖十二所示。試問橋應該建在何處才能使從$A$市過橋到$B$市的距離最近。設河的兩岸爲二平行線，且爲了節省橋的造價，橋需與兩岸垂直。

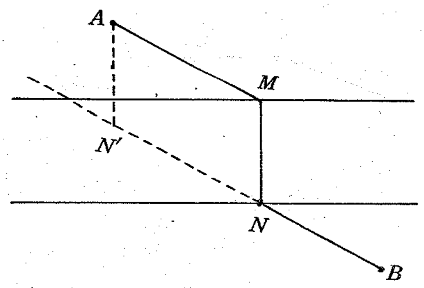



圖　十二

註：本題中，從A經橋到$B$的距離，不管橋建在何處，由題意知，橋長爲河流兩岸間的平行距離，故不影響$A$到$B$的距離。

解　假設橋$MN$已經造好。

將$MN$沿$\overrightarrow{MA}$平移至$AN'$，使$M$變換至$A$。

則　　$AM=N'N$

因此　　$AM+NB=N'N+NB$

故路徑$AMNB$最短的充要條件爲$N'$、$N$、$B$共線。

作法：

1° 從$A$向河岸作一垂線段$AN'$，使$AN'$等於河的寬度。

2° 連接$N'B$，則$N'B$與靠近$B$的河岸的交點爲$N$，過$N$作河岸的垂線交另一岸於$M$，則$MN$卽爲該造的橋，如圖十二所示。

討論：如果$A$、$B$兩城被兩條以上的河流所隔，每條河的橋應該建在那裏呢？讀者不妨想一想。

〔2〕：撞球問題

打撞球打中球心時，球碰到球枱的入射角與球反彈離枱邊的反射角相等。設一撞球枱的四邊分別是$l_1$、$l_2$、$l_3$、$l_4$，$A$、$B$爲枱上的兩個球，如下圖十三所示。

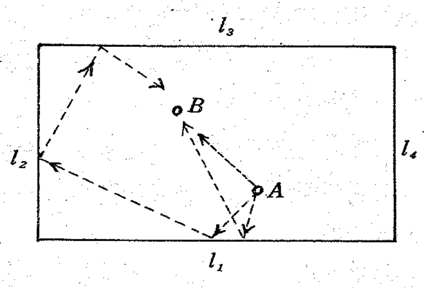



圖　十三

試問$A$球應打向$l_1$邊的那一點，才能使$A$球碰到$l_1$邊，接著碰到$l_2$邊再碰到$l_3$邊最後撞上$B$球？

解　設$A$球連續碰上$l_1$，$l_2$，$l_3$三邊再撞上$B$球的路徑爲$A\ x_1\ x_2\ x_3B$，如下圖十四所示。

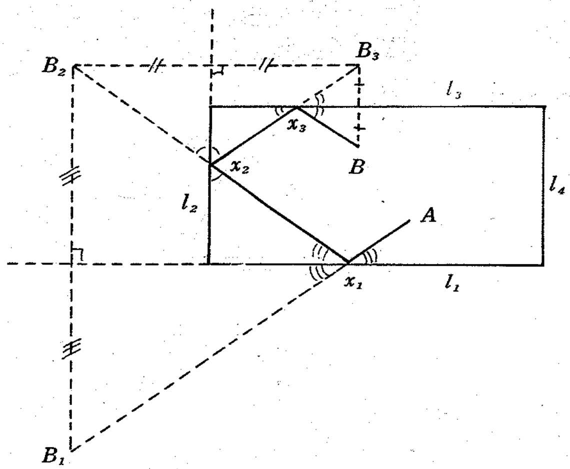



圖　十四

因爲入射角與反射角相等，所以可以很容易地看出$x_3$爲$B_3\ x_2$與$l_3$的交點，其中$B_3$爲$B$對

$l_3$鏡射的像。$x_2$爲$B_2 x_1$與$l_2$的交點，其中$B_2$爲$B_3$對$l_2$鏡射的像。而$x_1$爲$B_1 A$與$l_1$ 的交點，$B_1$是$B_2$對$l_1$鏡射的像。

因此$x_1$點的找法如下：

1° $B$對$l_3$鏡射得像$B_3$

2° $B_3$對$l_2$鏡射得像$B_2$

3° $B_2$對$l_1$鏡射得像$B_1$

4° $AB_1$與$l_1$的交點即爲所求的$x_1$點

討論：

1. 讀者可以利用同樣的方法求得使$A$連續碰撞$l_1$、$l_2$、$l_3$及$l_4$四邊再撞上$B$球，$A$球應該打中$l_1$邊的那一點。
2. 如果球枱的邊不是矩形，而是任一多邊形，亦可利用同法，找出使$A$撞上$B$、$A$所該打出的方向。
3. 如果$A$是母球，$A$須撞上$B$球使$B$球進枱上的某一洞，讀者可以利用上述的方法求出$A$該打向何處嗎？

〔3〕：作圖題的歸類

首先考慮下列三個不同的作圖題：

(a)已知：三點$M_1$、$M_2$、$M_3$

求作：一三角形$A_1A_2A_3$，使$M_1$、$M_2$、$M_3$分別是以此三角形的三邊向外所作正三角形的三個異於$A_1$、$A_2$、$A_3$的頂點。（參閱圖十五）

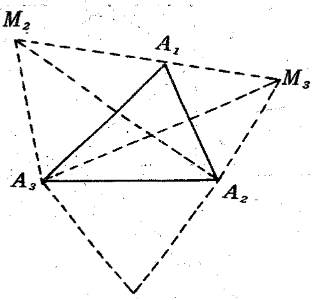



圖 十五

(b)已知：三點$M_1$、$M_2$、$M_3$

求作：一三角形$A_1A_2A_3$使$M_1$，$M_2$，$M_3$分別是以此三角形的三邊向外所作正方形的中心。（參閱下圖十六）

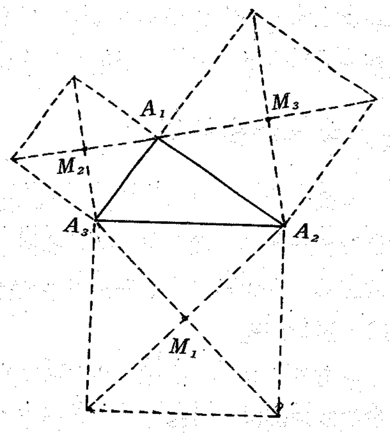



圖 十六

(c)已知：平面上7個點

求作：一七邊形使已知的7點分別是此七邊形每一邊的中點，參閱下圖十七。

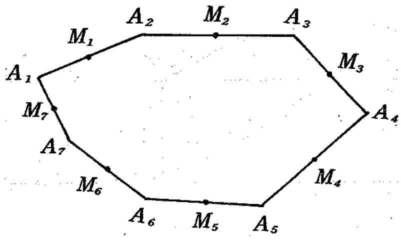



圖 十七

(a)，(b)和(c)這三個作圖題，看起來是不同的題目，也可以利用一般中學幾何所介紹的方法求解，三個問題各有不同的解法。我們再考慮另外一個作圖題：

(d)已知：平面上$n$個點及$n$個角$\alpha_1$、$\alpha_2$、…$\alpha_n$

求作：一$n$邊形使已知的$n$個點爲以此$n$邊形的$n$邊爲底向外所作等腰三角形，頂角分別是$\alpha_1$，…，$\alpha_n$的頂點。

現將(a)，(b)，(c)拿來跟(d)比較，很容易就可發覺(a)，(b)，(c)三個問題實際上都是(d)的特例。(a)是$n=3$，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=60°$的情形，(b)是$n=3$，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=90°$的情形。(c)則是$n=7$，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=\alpha_6=\alpha_7=180°$的情形。因此只要能解得(d)，那麼(a)、(b)、(c)三

個作圖題就不用分別求解了。(d)的解只要借一點點保長變換的幫忙就可迎刃而解。

解(d)：設所求的 $n$ 邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 已作出。（如圖十八，其中 $n=5$ ）

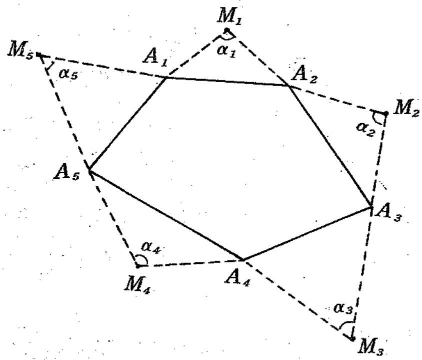



圖　十八

在平面上任取一點 $B_1$，設 $B_1$ 繞 $M_1$ 旋轉角 $\alpha_1$ 得 $B_2$，$B_2$ 繞 $M_2$ 旋轉角 $\alpha_2$ 得 $B_3$，…，$B_n$ 繞 $M_n$ 旋轉角 $\alpha_n$ 得 $B_{n+1}$，這 $n$ 次旋轉將點 $A_1$ 依次變換爲 $A_2$，$A_3$，…，$A_n$，$A_1$，故線段 $A_1B_1$ 的變換爲:

$$A_1B_1\rightarrow A_2B_2\rightarrow\cdots\rightarrow A_nB_n\rightarrow A_1B_{n+1}$$

因爲旋轉保長，所以 $A_1B_1=A_1B_{n+1}$

同法，在平面上再取一點 $C_1$，$C_1$ 作同樣的連續 $n$ 次旋轉可得一點 $C_{n+1}$ 使 $A_1C_1=A_1C_{n+1}$

因此 $A_1$ 爲 $B_1B_{n+1}$ 及 $C_1C_{n+1}$ 的中垂線的交點。$A_1$ 求得後，其餘的頂點 $A_2$，$A_3\cdots$，$A_n$ 就可一個接一個的找出了。（如圖十九）

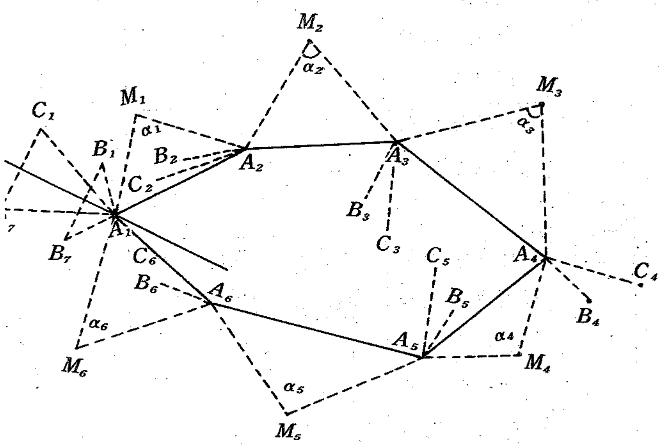



圖　十九

討論：

1. 當 $\overline{B_1B_{n+1}}$ 與 $\overline{C_1C_{n+1}}$ 的兩條垂直平分線相交時，有唯一的解，平行時無解，重合則有無窮多解。
2. 本題所作出的多邊形不一定是凸多邊形。

註1：雙曲線幾何學是將歐氏幾何學中的第五公設（一般稱爲平行公設）改爲“過線外的一點可以有兩條以上的平行線”。其餘公理，公設都不改變所演繹出來的幾何學。雙曲線幾何學中三角形的內角和恆小於180°，且介於 0 到 180 之間的任一值 $\alpha$，都可找到一三角形使其內角和爲 $\alpha$。並且三角形的面積有極限，此極限不管三角形的邊多長，其面積都沒法達到此極限。詳見〔2〕

註2：雙曲線幾何學的發明，一般把榮譽歸諸於高斯，龐禮愛及羅波切夫斯基三人。龐氏在 1832年出版一本“Appendix”，羅氏在 1830也發表了“虛幾何學”，都是這方面的成果。高斯的貢獻則散見於他與友人的通信中。詳見〔2〕

註3：橢圓幾何學與歐氏幾何學不同的公設差異是：

(1)任二直線都相交，即沒有平行線存在。

(2)直線長都是有限的，但無止境。

橢圓幾何學中，三角形的內角和都大於180°，詳見〔2〕。

## 參考資料


〔1〕: I. M. YAGLOM: Geometric Transformations, The L. W. Singer Company.

〔2〕: H. E. Wolfe : Introduction to Non-Euclidean Geometry. Holt Rinehart Winston.



〔作者現職：國立臺灣師範大學數學系副教授〕