最大容積問題

李恭晴

在一般的微積分書上，當講授到極大與極小問題的時候，通常都會提出如下的一個例子或練習題：

問題1：將一正方形鉛板的四個角各剪下一小方塊，然後將四邊往上折，以製成一個沒有蓋子的方盒子，問要剪下多大的方塊，才能使得這個盒子的容積爲最大？

爲了要使問題表現得更清晰，我們可以作一圖形加以說明：

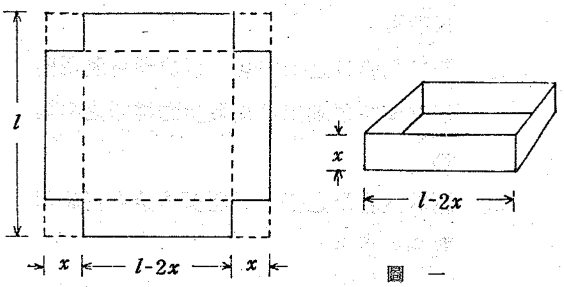

圖 一

根據上圖，我們可將問題描述爲數學形式：

問題1′：設 l 爲一正的常數，則正數 $x<\frac{l}{2}$ 等於多少時，$V=x(l-2x)^2$ 有極大值？

要解這個問題，可以先求出 V 對於 x 的導數，令此導數等於零以求出 x 之值，即可得到答案：

因爲 $V=x(l-2x)^2=l^2x-4lx^2+4x^3$

所以 $\frac{dV}{dx}=l^2-8lx+12x^2=(l-2x)(l-6x)=0$

由此可得 $x=\frac{l}{2}$ 或 $\frac{l}{6}$。顯然當 $x=\frac{l}{6}$ 時 V 有極大值（$x=\frac{l}{2}$ 不合所求）。將 $x=\frac{l}{6}$ 代入 $V=x(l-2x)^2$，即得 V 之極大值爲

$$V=\frac{l}{6}(l-\frac{l}{3})^2=\frac{4}{54}l^3\doteqdot 0.074074\times l^3$$

這個問題以及它的解答都是大家常常看到的，我們提出它的主要目的不只是在求它的解，而是希望藉由這個常見的問題來探討一些其他有關的問題。

在問題1中並沒有明白規定這個盒子的邊一定要與底面垂直，然而由於題目中告訴我們必須將四個角各剪下一個小方塊（正方形），因此，自然地，向上折之後盒子的邊就垂直於底面了。現在我們想一想，如果將這個問題的條件改一改；比如說，不限定盒子的邊一定要和底面垂直，那麼所做成的盒子的容積是不是會更大呢？

問題2：利用與問題1所述同樣大小的一塊正方形鉛板，如果將四個角各剪下一小塊（不一定是正方形），而製成一個沒有蓋子的方盒子（底面爲正方形，邊可傾斜，見圖二），問要如何做才能使得這個盒子的容積爲最大？其最大容積是多少？

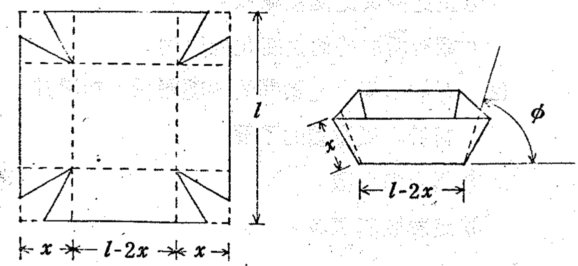

圖 二

如圖二，我們將正方形的四個角各剪下一小塊，而構成邊爲傾斜的盒子。若邊之傾斜角度爲 ϕ（$0<\phi<90°$），邊之斜高爲 x，則這個盒子的容積是：

$$(1)\quad V=\frac{1}{3}x\sin\phi\{(l-2x)^2+(l-2x+2x\cos\phi)^2+(l-2x)(l-2x+2x\cos\phi)\}$$
$$=l^2x\sin\phi-2lx^2\sin\phi(2-\cos\phi)+4x^3\sin\phi(1-\cos\phi+\frac{\cos^2\phi}{3})$$

在這個式子中，l 是所給正方形鉛板的邊長，它是一個固定的常數，因此其容積 V 只隨 x 與 ϕ 而變。我們的工作是要求出當 x 和 ϕ 各等於多少時，V 有最大值。爲了這個目標，我們可以依次將 x 與 ϕ 中的一數視爲固定而就另一數微分，（即求偏導數），再令其偏導數等於零，並解聯立方程式以求得 x 與 ϕ：

(2) $$\frac{\partial V}{\partial x}=l^2\sin\phi-4lx\sin\phi\,(2-\cos\phi)+12x^2\sin\phi\left(1-\cos\phi+\frac{\cos^2\phi}{3}\right)=0$$

(3) $$\frac{\partial V}{\partial \phi}=l^2x\cos\phi-2lx^2(2\cos\phi-\cos 2\phi)+2x^3\left(\frac{5}{3}\cos\phi-2\cos 2\phi+\cos\phi\cos 2\phi\right)=0$$

由於聯立解上列兩個方程式在計算上相當麻煩，因此在實際處理這個問題時，我們最好換另外一個方法，我們將 ϕ 視爲固定而只利用(2)式求出 x 與 ϕ 之關係式，得

(4) $$x=\frac{2-\cos\phi\pm\sqrt{1-\cos\phi}}{6-6\cos\phi+2\cos^2\phi}\,l$$

若根式前取正號，則 $x\geqq\frac{l}{2}$ 不合問題之所求，故根式前必須取負號，此時 V 有極大值（對於固定的 ϕ 而言）。

現在繪出上列 x 與 ϕ 之關係式的圖形如下：

從圖形中可以看出當 ϕ 越大時 x 必須越小，才能使得 V 有極大值。

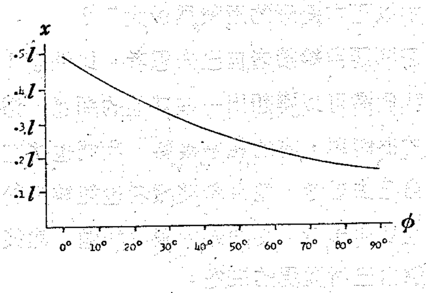

圖　三

將(4)代入(1)，並化簡可得

(5) $$V=\frac{2}{3}l^3\,\frac{2-3\cos\phi+3\cos^2\phi-\cos^3\phi+2(1-\cos\phi)^{\frac{3}{2}}}{(6-6\cos\phi+2\cos^2\phi)^2}\cdot\sin\phi$$

利用連續計算裝置可算出對應於每一個 ϕ 的 V 值，其圖形如下：

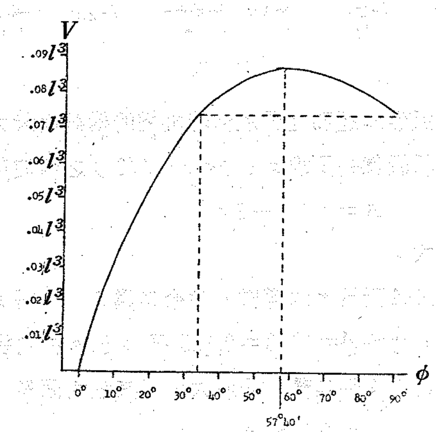

圖　四

這個圖形告訴我們：對於每一個固定的 ϕ，我們可以適當的選取 x 的值（取法見(4)式），使得 V 之值爲最大，此時 V 之最大值卽爲圖中對應於 ϕ 的 V 值。

從圖形上可以看出，當 ϕ 大約在 33°55′ 到 90° 之間時，V 的極大值都大於 90° 時 V 的極大值。並且在 ϕ 大約等於 57°40′ 時 V 之極大值最大，可以達到 $V=0.086428785\,l^3$

這個值比 ϕ 在 90° 時，V 之極大值 $0.074074\,l^3$ 大約要大 $0.012354\,l^3$。換句話說，當我們將盒子的邊做成傾斜 57°40′ 時，其最大容積是做成垂直時最大容積的 7/6 倍左右。（請讀者自己計算，當邊的傾斜度爲 60° 時，盒子的最大容積是多少？並比較看看是否比邊垂直時的最大容積大？）

從上面的問題中，如果我們再仔細的思考，也許能夠發現如下的問題：

問題 3：將一個寬度爲 l 之鉛板的兩邊垂直往上彎，以製成一個水槽，問彎上去的水槽的邊爲多高時，可以使得這個水槽的流水量爲最大？

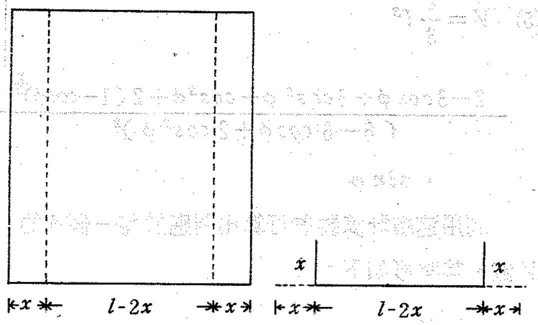

圖 五

這個問題卽是要求何時水槽的橫截面最大。換句話說就是要求 x（$0<x<l/2$）之值使得

$$A=x(l-2x)$$

爲最大。

求 A 對於 x 的導數，並令其爲 0，卽得 $x=l/4$，此時 $A=l^2/8=0.125\,l^2$。卽水槽之邊的高度爲 $l/4$ 時其橫截面最大，且其最大面積

$$A=0.125\,l^2$$

問題 4：若問題 3 之水槽的兩邊可以是傾斜的，問如何做才可使其流水量爲最大。

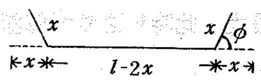

圖 六

若水槽邊的傾斜度爲 ϕ，則水槽的截面積

$$A=\tfrac{1}{2}[(l-2x)+(l-2x+2x\cos\phi)]\cdot x\sin\phi$$

$$=x(l-2x+x\cos\phi)\cdot\sin\phi$$

分別求 A 對於 x 與 ϕ 的偏導數，並令其爲 0，得

$$\frac{\partial A}{\partial x}=(l-4x+2x\cos\phi)\sin\phi=0$$

$$\frac{\partial A}{\partial \phi}=x(l\cos\phi-2x\cos\phi+x\cos 2\phi)=0$$

解此聯立方程式，得 $\phi=60^\circ$，$x=\dfrac{l}{3}$

因此 $A=\dfrac{\sqrt{3}}{12}l^2\doteq 0.1443\,l^2$

如果我們已經知道“周長固定之四邊形中以正方形的面積最大”以及“周長固定的六邊形中以正六邊形的面積最大”這兩個事實，則要解問題 3 與問題 4 就可以不必用到微分的概念。例如，於問題 3 中，我們再做一個同樣大小的水槽覆蓋在原來的水槽上，卽可構成一個方形的“水管”，這個水管的橫截面是一個矩形，其周長 $2l$ 爲固定長，因此要使橫截面最大，則此水管之橫截面必須是一個正方形，因而每邊長爲 $l/2$，由此卽得 $x=l/4$。（見圖七）

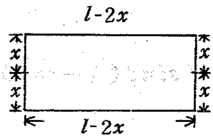

圖 七

在問題 4 中，利用同樣方法也可構成橫截面之周長爲 $2l$ 之六邊形的水管，欲使其面積爲最大，必須是正六邊形，因此每邊之長爲 $l/3$，卽得 $x=l/3$，由此得 $\phi=60^\circ$（正六邊形的每一外角等於 60°）。（見圖八）

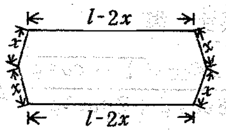

圖 八

反過來，由問題 3 也可以推知“周長固定之矩形以正方形的面積爲最大”。在此我們又連想到下面兩個問題：

問題 5：由問題 3 能否推得“周長固定之四邊形中以正方形的面積最大”？

問題 6：由問題 4 能否推得“周長固定之六邊形中以正六邊形的面積爲最大”？

這兩個問題留給讀者自己去思考。以問題 1 爲起點，我們還可以聯想出一些其他的問題，這些問題有的很簡單，有的相當複雜，我們也將它留給讀者自己去思考，並且希望讀者也能夠對於一般的問題多加思考，從問題中發現問題，然後再設法去解自己所發現的問題。

問題 7：如果問題 1 之鉛板不是正方形，而是邊長分別爲 a 與 b 之矩形，則 x 等於多少

時其容積最大？

問題 8：如果問題 3 之水槽的底面寬為 d，垂直向上之邊的高度為 h，長度為 l。現欲將此水槽兩端剪開，且將剪開後底之兩端向上彎以製成形如問題 2 之容器（兩邊垂直向上，另兩邊可傾斜）。問要如何做才能使得此容器之容積為最大？

問題 9：利用一長與寬分別為 a 與 b 之矩形鉛板，做成形如問題 8 之容器（一雙對邊垂直向上，另一雙對邊可傾斜），問要如何做才能使其容積為最大？若 $a < b$ 時，問那一雙對邊垂直向上時其容積較大？

問題 10：若問題 9 之容器的四邊都可傾斜向上，問要如何做才可以使得其容積最大？

問題 11：類似於上面的問題，你還能找出那些問題？（你不一定會解的問題也可以）

〔作者現職：國立臺灣師範大學數學研究所所長〕

女數學家—蘇菲・日赫曼

陳昭地

我們常聽到男數學家的故事，很少知道傑出的女數學家。這裏，想介紹一位傑出的法國女數學家蘇菲・日赫曼。

蘇菲・日赫曼（Sophie Germain）在1776年生於法國巴黎。正值法國大革命期間，她長期埋首在她父親的圖書室裏研究，自尋樂趣。在那裏，她讀到了有關阿基米得（Archimedes）在沙堆上沉思一個幾何圖形而猛烈死亡的故事；她頗受這段故事感動，因此，不顧雙親的堅決反對，她決心研究數學。


蘇菲・日赫曼
（1776-1831）

她習慣於整個晚間研究分析的問題。在那個恐怖朝代，她專注於微分學的研究。當時 Polytechique 學院不收女生，她百般設法拿到該學院的各個教授有關數學的講義，潛心研究。後來，她化名與當代名數學家 Lagrange 通信表示了她的新觀念。Lagrange 對她留下深刻的印象，並終能了解她的恒等式，隨之經常公開讚揚她的成果。這時，蘇菲才自認為一位數學家了！

她的研究成果主要是在數論（註 1）與古典微分幾何（註 2）方面。在1815年，她獲得法國學院的頒獎。在當時，她是頗受其他數學家的推崇，並被推薦為德國哥庭根（Gottingen）大學的名譽學位的候選人；只可惜在未獲得這項榮譽之前，她就去世了！

〔註 1〕 在數論上，她得到Fermat 問題的一些答案。

〔註 2〕 在古典微分幾何上，她得到平均曲率的恒等式。

〔作者現職：國立臺灣師範大學數學系副教授〕

［參考資料］

1. E. D. Nichols 等合著，Holt Algebra 1，Holt, Rinehart and Winston, Inc.（1974）P.118.

2. 岩波數學辭典，第二版（1968）P. 148 和P. 895.