數學應用與實際問題

陳昭地

引言　本文的主要目的在於探討數學的應用與數學教學間的一些關係。內容主要根據Henry O. Pollak 在 School Science and Mathematics(1978年3月)所發表的論文「On Mathematics Application and Real Problem Solving」，參酌國內實況加以改寫而成。在這裏，我們並不企圖給出「數學的應用」一詞的嚴格定義；不過，它顯然包含著數學與其他的關係，甚且寄望由它產生一些實用的價值。

現在一般學生總認為數學是既抽象且乾燥無味的學科，無法領略出它的實際用途；社會大衆總埋怨著現行數學教學無法提供各個行業的需求。這些或多或少帶給了教學上的困難。我們希望提出實際問題的種種情況，分析數學在解決實際問題困難所在，它並不眞正表示與實際問題有所脫離。

我們常在中外各種有關數學教本上，發現作者寫出的解決實際問題例子中，頗多與眞實的現象有所出入，多少帶給教學上的困擾。在此，我們分析各種搜集出來的問題，到底那些是正確合適的，那些是有欠妥當的。

日常生活中立即使用到的數學　首先我們提出在日常生活中，習以為常、最顯然、最少爭論立卽用到的數學。舉凡算術或代數、幾何、機率、統計及一些比較基礎的數學之大部分資料，可以說是由日常生活上實際需要而產生。在日常生活上，如：檢查稅單、估計漆房子所需油漆量，買一塊大小適當的地毯，訂做書架，贏得撲克牌遊戲以及種蕃茄等，我們一直在用數學。像這類的問題在每一教本上幾乎都可發現到。下面讓我們舉一些如此完全可以感受到的日常生活中之問題。

問題1　張老板想把每斤售7.5元的蕃茄改裝成每包 3 斤售價23元。試問(a)他是提高售價或是降價呢？(b)每斤提高或降價多少？

問題2　在公園裏做了一個長10呎，寬 9 呎的大沙箱。已知一輛載運 5 立方碼的砂石車倒進該沙箱恰可填平。試問這個沙箱深度是多少？

問題3　興國身邊有24呎長的鐵絲籬笆，他想用全部的鐵絲圍一個長方形的養兎欄。試問他是否能圍成長寬都是12呎的圍欄？為什麼？長寬各為12呎，8 呎呢？8 呎，4 呎呢？為什麼？並寫出 5 種他能圍成的長方形之長與寬。

以上的問題，都是眞正完全可意識到的。數學應用到這些問題上，是毫不容置疑的。我們只希望有更多、更大的變化。

日常生活中，多少嘗試著不同程度的應用性，敘述出的問題　在教本上另一類常見的問題，大部分在數學以外，由日常生活中敘述出來，聽來頗為順耳的問題。這些問題的關鍵在一開始時需要把一些句子的敘述翻譯成數學模型。所以在這過程中需要翻譯的能力與隨後的數學技巧。這些問題的敘述與眞實世界的關連是完全逼眞實在，但問題常發生於這些關連往往多少是錯誤的，例如：

問題4　某種廠牌的抽風機宣稱每分鐘能抽出 3375 立方呎的空氣。試問此抽風機在長、寬、高各為27呎，25呎，10呎的房子，需多少時間能更換該房子內的空氣？

這個問題的困難在於假定室內原有空氣要等到完全抽出後，新的空氣才會進入。事實上，空氣是流動性的，在抽出原空氣時，新舊空氣仍然是混

合的。你是否曾經注意到即使强有力的抽風機要花多少時間才能排除厨房內燒焦魚肉的味道呢？這個問題的答案最好改成「至少需多久的時間」。

問題5　某航空公司允許旅客40磅免費行李託運，但在超過40磅以上的每磅需付5元運費。若以W表示行李的重量磅數，C表運費元數；則上述規定與下列那一個敘述等價！

(a) $C=5(W+40)$　(b) $C=5(W-40)$

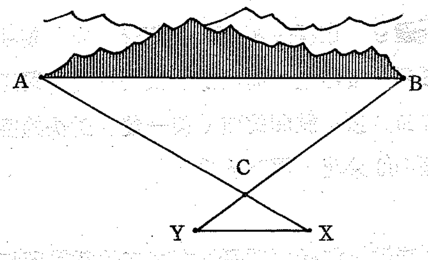
(c) $C=5W-40$　(d) $C=5W+40$

這個問題的選目都是線性關係。依照航空公司的規定，顯然可知W與C的關係不是線性；因此可不必詳細判斷就可知道沒正確的答案；換言之，本問題失去原有的意義了！

同樣地，在問題4中，對於各種不同直徑的水管之放空或填滿水槽和游泳池的水，對擁有線性生產費用和已知顧客對價錢反應的工廠或對許多其他固定形式的問題，也都有相同的缺陷。在這些問題中，都已包含了眞相要點，也提供了一些數量關係的眞確性。就對問題的眞正關係，與對學生提供眞實性之努力來說，它們仍可被接受的。然而，問題對學生的眞實性之最重要一點是資料的準確性。概略和近似的計算不但是很好的數學練習，事實上，也可能是獲得代表問題眞正的數學模型具有充分理由回答的估計。

利用其他訓練的言辭之問題　有關其次主要數學應用的一類就是用到科學或工程上的訓練，與一些可能較不尋常的其他學識性的學科。環繞在日常生活所發生的應用上的困難，也同樣地重現在這些情況。這些聲稱來自於其他學識性或工程訓練的問題，也是在於翻譯與隨後的數學技巧的練習，而應用的眞實性往往會被忽視了！

問題6　爲設計建造穿過某座山的一條隧道（如下圖），土地測量者測出 $\overline{AX}=100$ 公尺，$\overline{BY}=80$ 公尺，$\overline{CX}=20$ 公尺，$\overline{CY}=16$ 公尺而 $\overline{YX}=30$ 公尺。試求隧道 $\overline{AB}$ 的長。



上面問題的敍述中，也許有A、B、C、X、Y五點同在一平面的假設；這個問題是需要這個條件的。但這個困難在於此山附近的一旁如果是平坦的話，那麼就用不著費心地去造一條隧道了！

下面是常用到原子物理學上的一個例子：

問題7　假設每個原子的直徑是 10^{-8} 公分。試問需多少個如此的原子才能配置成每邊長爲1公分的立方結晶體？

這個問題常會在幾何學和乘法計算的練習中發現到。但它也產生了一連串的問題：原子的直徑怎樣定義？原子彼此間是否會滲透？它們是否能形成簡單地立方體？這個晶體的形成與周圍環境是否有關？這些晶體是否容易地形成每邊長1公分大的立方體？

古怪的問題　在教本上，純粹爲了數學的訓練，最好的安排就是古怪奇異的應用問題。這其中需使用日常存在或從其他訓練中的言辭，這些都是一般人相當清楚的言辭，但毫無眞實性。一般說來，數學家是較喜歡這類的問題。常在教本上的這類問題之用意是相當模糊的。也許它們提供給可憐學生們的一些笑料吧！或是特爲這枯燥的課程轉換到其他較愉快情景的幻想！這些詼諧性的資料，雖然不是數學的實際應用，但在教學上仍然有許多的益處。下面就讓我們看幾個例子。

問題8　兩隻蜜蜂一起採花蜜，在30分鐘內

共採了100朵蜀葵花。設每隻蜂每天工作8小時，每星期工作5天，問在夏季的15個星期中它們共採了多少朵的蜀葵花？

問題9 在採一組100朵花時，有一隻蜂在工作18分鐘後停止，而其餘的讓另一隻單獨工作，費時20分鐘。試問這隻（後一隻）勤快的蜜蜂單獨採100朵花，需時多少？

有時候，這樣的問題具有高度的數學興趣。例如在1966年夏天，俄國大數學家Kolmogorov對一群相當於我國的國中程度的學生，提出了下面的問題：

問題10 有一隻蜜蜂與一小塊糖分別在一三角形的內部兩個不同的位置。這隻蜜蜂想要到這塊糖上，設這隻蜂到這塊糖之前，必要接觸到這三角形的三個邊。試問在這個條件下，那條路線最短？

在上面一連串有關蜂的問題中，並不隱涵眞實世界的眞正關係。但這些一方面提供一些簡單的代數問題，另一方面提供一個具有高度精巧與教育性的幾何問題。

眞實生活上的眞確應用 到目前爲止，我們已檢驗的數學應用，不管是眞確的、是錯誤的或是古怪離奇的，都有簡單特殊的問題，僅需把故事內容翻譯成數學名稱，並應用通常的數學技巧，就可給出它們的答案。當然，數學的實際應用往往不是那麼簡單的。從一個特殊的問題開始，我們可能會陷於紊亂繁瑣的狀況，使得我們需多花時間來試圖猜測原來題意。我們也常發現到要尋求一個正確的問題，往往比解你已發現的問題來得困難。就如以回答：從這裏到機場的最好路線如何走法？爲例吧！一開始就應設法瞭解所謂「最好」的意義。若你已租了一部車，而且時間很充裕，你所謂的「最好」可能指距離爲最短。在其他情況下，你可能是希望預期的時間爲最短。有時，依天候狀況，你可能希望交叉路口的次數爲最少以免走錯路。也許你也可能希望注意到騷擾或危險，或在特別道路上警察的巡邏，你也許已經在以前經驗過在某一地區，繞行不常走的道路迷途的機會有多大！

若因惡劣的天候使你遲到了，是否飛機也可能同樣地遲了呢？就對一般大衆的經驗來說，大致上「最好」的路徑並不是指預期的時間最短，而是指預期時間上的最小差異。一般的人在時間差異很少的情況是能容忍較長的平均時間的。

超級市場是提供眞實情況很好的地方。數學老師們如多做些購物的經驗，如此他們會發現這些問題。當一種產品包裝成各種大小不一的形式，到底那一種最便宜呢？這些問題可以應用簡單的算術馬上得到答案。但是，有一些值得考慮的事情。當你買得太多時，東西可能在你未用完前就已變臭、不新鮮或腐爛了！一種特大捲的紙巾對你可能不適當的，因爲它大得無法放在厨房的架上。

事實上，在日常生活中，有數不盡的情況，隨時都利用到類似的數學問題。你是否能6個完全相同的木片併成一個完全的立方體呢？在一塊草地上耙樹葉的最好策略是什麼？如果你洗了一堆的襪子並晒成一排，那麼同一雙相鄰的機會是多大！在一隧道中兩車最佳的保持距離是多少？在已知某城市的交通燈號誌狀況下，在該市的兩地區，如何走法需時最短？很顯然的，這類情況並不是樣樣都能很有效地寫成數學問題。甚至，你一開始並不能確定它們能產生那一類的數學。但是，對學生來說，把這些見到的事實，練習用數學來解決或設法把它們組成有用的問題，是很重要的。

事實上，來自於試圖眞正數學應用的最有價值的課程之一是在特別地模糊情況下，尋求一個正確的問題，它的本身就是一個眞正數學的成就。這在教室內很重要，不僅因它是誠實的實情，而且用來削弱數學的唯一目標仍爲「回答」的觀

點，並可幫助我們走向加强整個數學結構與過程的重要性。

從眞實生活的數學化練習過程中，學生偶而會發現到與數學頗不相關的情況，但這仍然是相當有價值的。

其他訓練上的眞實應用　數學應用到其他科學上的，需專門知識上的或工程上的訓練，也是有相同的模型。同樣地，有些情況的瞭解有被改進的需要；有些形成正確的數學問題可能佔整個過程之半。從各種不同的訓練中體察那些能被數學化的情況是相當重要的。除了通常被視爲數學應用之主要物理學科外，所有的工程學與物理學以外的其他科學如社會學與生物學，現今也都利用到有趣的數學。例如：生物學者做成肉食動物捕捉習慣的週期並企圖分析時疫之流行的數學模型，且不斷地發展數學的遺傳學更進一步通曉的理論。工程師利用拓樸學來畫電路，利用機率到隨意震動上，和利用近代的最佳技巧理論到生產和控制上。他們也用到許多的微分方程式來解決問題。

甚至律師有時候也需要重要的數學。例如：對於可扣除的法律種種規定的解釋，那類居民能滿足稅法的免稅規定，兩地的空中距離與公路距離的差異。

數學問題應用到其他的訓練上，眞實應用數學是重要的關鍵。這就是指數學模型與外在被數學化的情況間的關係必需淸楚地被瞭解。如果僅提及由其他訓練的一些言辭，就敍述出一些你所需求的有關等式，那是不完整的。你如何找到它呢？那些估計使你獲得等式呢？數學的結論是否對原來的眞實世界情況有意義呢？

在古典物理學上的數學應用常會遭到正如數學應用的不良表現。在許許多多的物理教學上，在我們試圖瞭解有關現象間的關係，常會使得對應的近似數學化結果失去原有的意義。就以在水平面上一物體的滑動爲例：

問題11　一物體在沒有摩擦的水平桌上移動。若初速爲每秒4公尺，試問在12秒鐘內共行經多少公尺。

學生們可能看到或猜到這種簡單的乘法問題的用意。但是，他們可能因此懷疑數學在眞正世界可能的用途極少吧！終究，很少人難得見到物體滑動了12秒而速度一點也不慢下來的情況。若讓學生在整個物體滑動的距離上估計摩擦的作用，則包含更多的數學、物理學和一些更多問題過程的步驟。

這個時候，實驗是必要。學生們可以在35—40公尺長的走廊上，以每公尺爲間隔作標記，試試滾動的玻璃球，控制好玻璃球的速度，讓它從第一個標記爲0的前面之彎道上滾動下來。在這彎道上，選擇它的出發點，他們能看到在4秒後玻璃球經過8公尺的標記，再看後4秒行徑的距離；當它走了6公尺時，學生們就能決定前4秒的平均速度爲2公尺/sec，後4秒則減爲$1\frac{1}{2}$公尺/sec了！由4秒後速度減少$\frac{1}{2}$公尺/sec，他們可能估計到這12秒內的平均速度爲$1\frac{1}{2}$公尺/sec。

現在回到原來的問題上，若玻璃球開始速度是每秒4公尺，12秒後它的速度被估計成每秒$2\frac{1}{2}$公尺；在這12秒鐘內共行多遠呢？我們所能得到的是小於$4\times12=48$（公尺）但大於$2\frac{1}{2}\times12=30$（公尺）；甚至猜成行經39公尺也是頗爲合理的估計。

結　論　上面我們企圖分類希望給予學生所能感受到應用數學的問題，並已看出在使這些問題眞實的一些困難所在。還有許多等待完成的工作以促使眞正的數學應用形成教室內教學的主要部分。然而，發現到數學以外的某種情況形成「眞正」的問題仍爲創造性的活動，正如發現數學本身一樣，它是很重要的成果。爲此，我們應繼續努力的是能把發現的方法與眞實的數學應用帶進教室裏；這兩件事是彼此增强的，而且兩者都是在學校數學的完整與眞實數學中必要的步驟。

〔作者現職：國立臺灣師範大學數學系副教授〕