某些數量問題的圖解

陳冒海

原文爲Lindsay L. Hess 與Adrien L. Hess 所寫之A Graphical Solution of Certain Selected Problems（刋載於School Science and Mathematics Vol LXXVIII, No. 2, Feb. 1978）

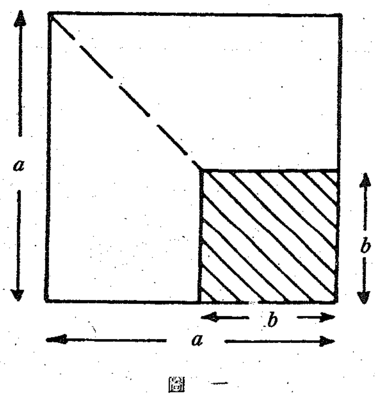
大家都知道：使用種種不同方式去顯示某一概念或論題實有其必要性，而利用圖畫、照片或圖解就是常能使這些論題或概念更清楚地顯示出來的一種方式。

本文將討論某些數量問題的圖解，這些問題中有許多都有兩種以上的圖解方法。本文將不涉及有關它們之代數解是否存在或理想之類的問題，而僅提供它們的圖解，目的在使它們的代數解更加清楚地顯現出來。這些數量問題常可在許多代數書中發現。

一、兩平方之差

兩平方之差的圖示較其代數的表示方式更容易看出它的涵義與因式。譬如說我們想分解 a^2-b^2。

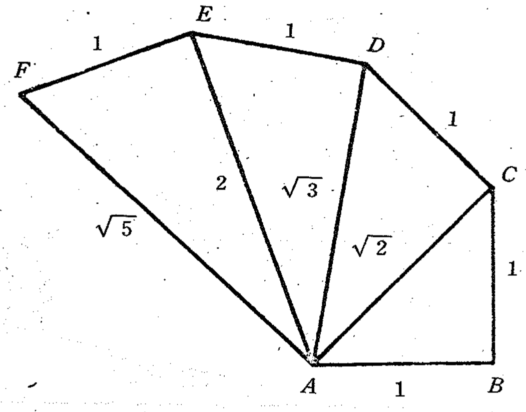
令 a^2 表較大的正方形的面積，b^2 表較小的正方形的面積，則 a^2-b^2 即表示（圖一中）斜線以外部份的面積。由於梯形面積等於上、下底之和乘以高再除以 2，而（圖一中之）虛線將斜線以外之部份恰好分成兩個全等的梯形，它們的兩底皆分別爲 a 與 b；高則皆爲 $a-b$。因此斜線以外部份的面積爲 $a^2-b^2=\frac{1}{2}(a+b)(a-b)+\frac{1}{2}(a+b)(a-b)=(a+b)(a-b)$。這就是大家都熟悉之 a^2-b^2 的因式分解公式。



圖一

二、正整數N的平方根

設等腰直角三角形 ABC 之兩腰之長皆爲1，則其斜邊之長爲 $\sqrt{2}$。過C點作 $DC\perp AC$ 且取 $\overline{DC}=1$，則 $\overline{DA}=\sqrt{3}$。如此繼續作下去，就可得出 $\sqrt{N}$。



圖二

三、形如 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x}$ 或 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{x}$ 之方程式（a與b皆爲正實數）

許多代數或物理問題之求解都用到這類的方程式。例如工作問題（已知某甲完成某項工作要2天，某乙要3天，試問甲、乙兩人合作要幾天

才能完成這項工作）；用水（油）管輸水（油）入一水（油）槽問題；串聯之電阻；並聯之電容以及透鏡問題等等。雖然這類問題用代數方法不難求出其解，不過讓我們來看一看它的一種幾何解法或許也是一件有益的事。

(1)方程式$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x}$之圖解（圖三）

在y－軸OL上標出一點C使得$\overline{OC}=a$；過x－軸上橫座標為b之點垂直於x－軸之線EG交CD於E且取$\overline{EG}=b$。連接O，G兩點，設OG交CD於H。自點H作x－軸的垂線交x－軸於一點Q。則Q點之橫座標即為所欲求之解。

(2)方程式$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{x}$（$a<b$）之圖解(圖四)

例如已知一空的水槽用A管輸水2小時就可注滿，用B管輸水則須3小時才能注滿，若用A管輸水注入該水槽，但用B管放水，試問幾時後該水槽才能裝滿。

這類方程式之圖解如下：在y－軸OL上標出一點C使得$\overline{OC}=b$，過x－軸上橫座標為a之點作x－軸之垂線EM交CD於E且$\overline{EM}=a$。連接O，M作直線交CD於N點。自N點作x－軸之垂線交x－軸於P，則P點之橫座標即為方程式$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{x}$之解。

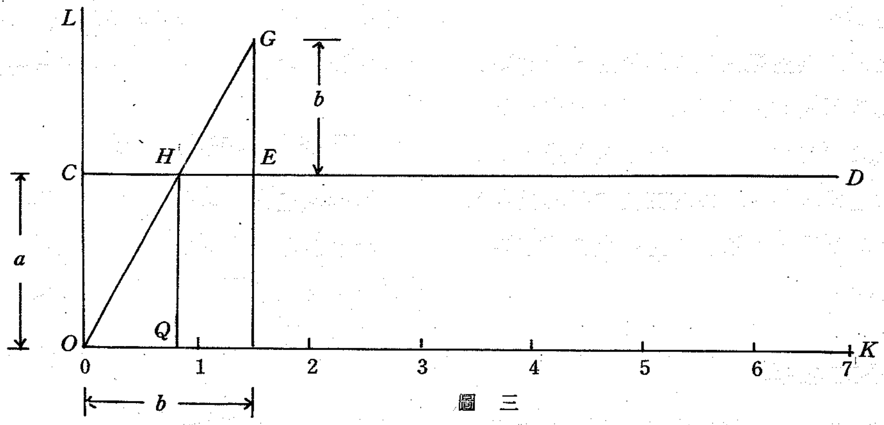


圖 三

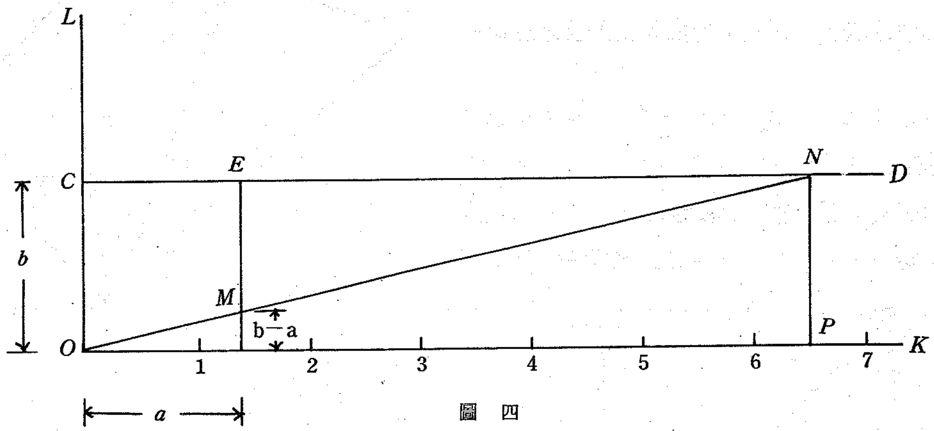


圖 四

四、二次方程式之根

令$ax^2-bx+c=0$表一二次方程式，此處a，b，c皆為正實數。以a除以等號兩邊，將原方程式化成$x^2-\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$。

標出一點A，其座標為（0，1），一點B其座標為（$\frac{b}{a}$，$\frac{c}{a}$）。以$\overline{AB}$為直徑，$\overline{AB}$之中點G為圓心，畫一圓。

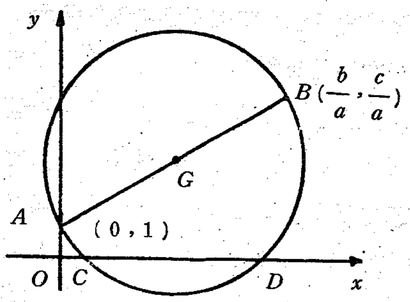


圖 五

(1)若此圓G交x—軸於相異的兩點C與D，則C與D點之橫座標卽為$ax^2-bx+c=0$之兩相異兩實根。

(2)若此圓G與x—軸相切，則$C=D$而其橫座標卽為$ax^2-bx+c=0$之（實）重根。

此乃因此圓圓心G之座標為$(\frac{b}{2a},\frac{c+a}{2a})$

而$\overline{AB}^2=\frac{b^2}{a^2}+(\frac{a-c}{a})^2$。因此通過$A$，$B$，$D$，$C$四點之圓的方程式為

$$(x-\frac{b}{2a})^2+(y-\frac{c+a}{2a})^2$$

$$=\frac{1}{4}[\frac{b^2}{a^2}+(\frac{a-c}{a})^2]$$

當$y=0$時它卽簡化為$x^2-\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$（卽原來之二次方程式），故此圓與$x$—軸之交點的橫座標卽為$ax^2-bx+c=0$之根。

(3)若此圓G不與x—軸相交，則$ax^2-bx+c=0$僅有虛根。在這種情形之下，我們可用下述圖解方法找出$ax^2-bx+c=0$之根（請參閱圖6）。

以$\overline{AB}$為直徑，$\overline{AB}$之中點G為圓心畫一圓。過O點作OE切圓G於E。設E之座標為(x, y)。以$\overline{OE}$為半徑，O為圓心作圓O。過G點作x—軸之垂線交圓O於J，K兩點。則J點（或K點）之橫座標卽為$ax^2-bx+c=0$之兩共軛複數根之實數部份，而它們的縱座標卽分別為此兩共軛複數根之虛數部份。

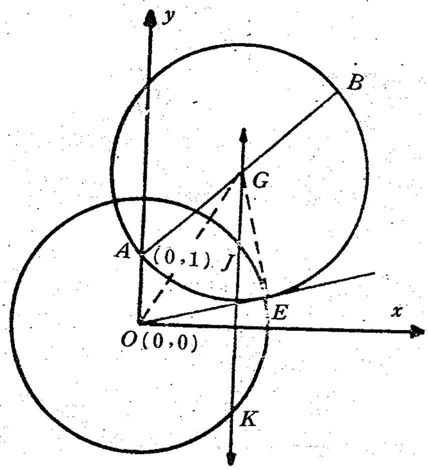


圖 六

此乃因G點之座標為$(\frac{b}{2a},\frac{c+a}{2a})$，因此直線$GK$之方程式為$x=\frac{b}{2a}$。由距離公式得知$\overline{OG}^2=(\frac{b}{2a})^2+(\frac{c+a}{2a})^2$

$$=\frac{b^2+c^2+2ac+a^2}{4a^2}\;;\;\overline{GE}^2=\frac{1}{4}\overline{AB}^2$$

$$=\frac{b^2}{4a^2}+\frac{(a-c)^2}{4a^2}=\frac{b^2+a^2-2ac+c^2}{4a^2}。$$

由於ΔOEG為一直角三角形，所以$\overline{OE}^2=\overline{OG}^2-\overline{GE}^2$

$$=\frac{b^2+c^2+2ac+a^2}{4a^2}-\frac{b^2+c^2-2ac+c^2}{4a^2}$$

$$=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}。$$

解聯立方程式 $\begin{cases} x=\frac{b}{2a} \\ x^2+y^2=\frac{c}{a} \end{cases}$

得$y^2=\frac{4ac-b^2}{4a^2}$，故$y=\pm\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$（卽直線$GK$與圓$O$交點之縱座標）。因由假設$b^2-4ac<0$，故$4ac-b^2>0$。因為

我們都知道利用公式解 $ax^2-bx+c=0$ 得出之兩根為 $x=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 故得證。

五、半角函數

圖七是一個有助於我們更容易憶起半角函數的簡單圖形，不過我們必須選取適當的符號以配合問題。

以 O 為圓心，1 為半徑畫一圓。令 $\angle BOC=\alpha$，則 $\angle CAB=\dfrac{\alpha}{2}$。

因 $\cos\alpha=\dfrac{\overline{OC}}{1}=\overline{OC}$ 而 $\sin\alpha=\dfrac{\overline{BC}}{1}=\overline{BC}$

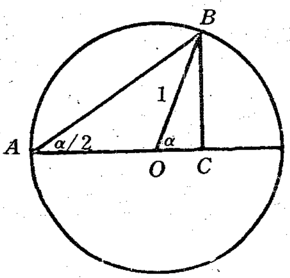


圖 七

，故 $\overline{AC}=1+\cos\alpha$ 且 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=\sin^2\alpha+(1+\cos\alpha)^2=2+2\cos\alpha$。

所以 $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{2+2\cos\alpha}}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$；

$$\mathrm{Cos}\frac{\alpha}{2}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{1+\cos\alpha}{\sqrt{2+2\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\mathrm{Tan}\frac{\alpha}{2}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

六、混合問題

這類混合問題在代數學上與實際生活中都常發生。其圖解可使它們更顯得有意義。假設某人用一種含酒精10％的溶液與另一種含酒精50％的溶液混合，得出24啢含酒精25％的混合溶液，試問這兩種溶液各需多少啢？

在 x 一軸 OA 上標示酒精的啢數；y 一軸 OB 上標示溶液的啢數（兩軸標示如圖八所示）。

現觀察24啢的50％為12啢，表50％之線可由 O 畫到 C（C 點之座標為（12，24））。同理24啢之10％為2.4啢而24啢之25％為6啢，因此表10％之線與表25％之線可由 O 分別畫到 D 與 E 兩點（D 點之座標為（2.4，24），E 點之座標為（6，24））。過 E 點作 OC 之平行線交 OD 於 F，過 E 點作 OD 之平行線交 OC 於 G 點。檢視平行四邊形 $EFOG$，得知 F 點之座標為（1.5，15），G 點之座標為（4.5，9）。因此含酒精10％之溶液要15啢，含酒精50％之溶液要9啢才能混合出含酒精25％之溶液24啢。

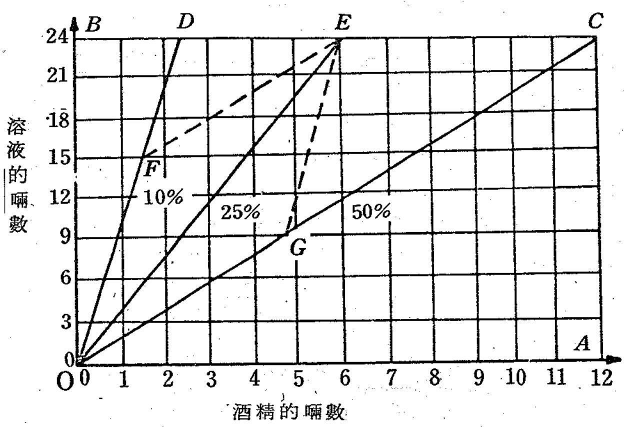


圖 八

七、移動問題

移動問題也可用類似於混合問題的圖解方法加以圖解。假設某人旅行600哩，部份旅程是以平均每小時45哩的速度完成。另一部份是以平均每小時60哩的速度完成，若整個旅程共花了11小時，試問各以45哩/時與60哩/時的速度旅行了多遠？

在 x 一軸 OA 上標示時數，y 一軸 OB 上標示哩數（如圖九所示）。令 OD 表速度為60哩/時之線（D 點之座標為（10，600））；令 OC 表速度為45哩/時之線（C 點之座標為（11，495））。標出 E 點，其座標為（11，600）。

（下接 41 頁）