圓錐曲線的“根”

林福來

一、前言

圓錐曲線是兩千五百多年前，古希臘數學家所構思並發展出來的。在古希臘的黃金時期中，古希臘數學家爲什麼會想到圓錐曲線？他們如何構思，如何發展圓錐曲線的呢？他們是指那一些古希臘學者呢？而他們在圓錐曲線上個別的貢獻又是些什麼呢？

本文的目的，就是希望對上述這些問題，循歷史的脈絡，將古希臘數學家中，研究過圓錐曲線的，作一點將錄，同時概述他們的構想及在這方面的成就，以究圓錐曲線的根。

總括地看，圓錐曲線的根可以簡單地說是由於古希臘數學家致力於解決當時所謂的幾何學三大問題——三等分任意角問題，立方體的倍積問題（Delian Problem）及方圓問題時所研究出的副產品，在解這些問題時，感覺需要而發明並使用了圓錐曲線。所謂立方體的倍積問題是如下的一代數幾何問題（以代數方法求解幾何問題之謂）：

“對於任意一個以 a 爲邊長的立方體 A，以及任意給定的比數 $m：n$，是否存在一個以 b 爲邊長的立方體 B，使得 A，B 體積間的比值恰好爲 $m：n$ 呢？

所謂方圓問題是說：

“給定一個圓要作一個正方形與之等面積”

二、古希臘學者的圓錐曲線概念

1. 畢氏（Pythagoras，大約B.C. 580年到B.C. 500年）

直角三角形的畢氏定理，人人耳熟能詳，畢氏早歲受教於塔樂斯（Thales，大約B.C. 600年）。塔樂斯及畢氏雖然都不是圓錐曲線的發明者，不過今天我們所使用的有關圓錐曲線的名詞——橢圓，雙曲線及拋物線，却都是畢氏最先創用的。當初畢氏使用這些名詞的意義與我們今天所瞭解它們所代表的圓錐曲線的意義是迥然不同。這些名詞開始時（大約B.C. 540年）是使用“面積的應用”的一種方法時被使用的。通常考慮一作圖題時，共有三種可能發生的情況；即求作的圖形的底邊可能短於、長於或恰等於一給定的線段長，這三種情況畢氏就分別以橢圓：表虧，短於；雙曲線：表盈，長於及拋物線：表移位而已，恰等於。開始時，畢氏本身並沒有將這些名詞與圓錐裁痕，圓錐曲線扯上關係。

阿波羅尼斯（Apollonius）稍後（大約二百年後）才將畢氏所使用的橢圓，拋物線，雙曲線賦與圓錐曲線的意義。阿波羅尼斯可說是對圓錐曲線下功夫最深的一位，其成就容後再敍，在此先談他如何利用“面積的應用”方法將三種圓錐曲線的特性建立起關係。

阿波羅尼斯證明它們的特性若換成今天所用的直角坐標方程式來表示，則其一般式爲：

$$y^2 = px \quad （拋物線）$$

$$y^2 = px + \frac{p}{d}x^2 \quad （雙曲線）$$

$$y^2 = px - \frac{p}{d}x^2 \quad （橢圓）$$

其中 d 代表參考直徑（即曲線的直徑，如橢圓的長軸長，雙曲線的貫軸長），p 則爲相關的另一參數。阿波羅尼斯就在這時第一次將這些名詞引用來表示圓錐曲線：

拋物線＝應用（Application）

雙曲線＝盈　（exceeding）

橢　圓＝虧　（falling short）

上面雙曲線及橢圓的方程式中，當$d\to\infty$時，即得$y^2=px$，故拋物線可視爲雙曲線及橢圓的極限情形。

我們可將阿波羅尼斯這三種圓錐曲線的方程式表示法求出如下：

首先考慮頂點在原點的拋物線，其方程式爲$y^2=px$。爲了建立拋物線與雙曲線及橢圓間的特性關係，我們需將雙曲線及橢圓中的一頂點也移到坐標原點，然後利用所給拋物線$y^2=px$來導出橢圓及雙曲線的方程式，令

p＝曲線的正焦弦長

d＝曲線的直徑

則當橢圓的左邊頂點在原點（0，0）時，其方程式（如圖一）可簡單地導出：

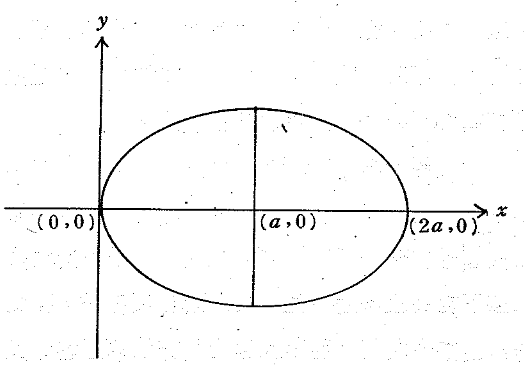


圖　一

$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow\ \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{(x-a)^2}{a^2}=\frac{a^2-x^2+2ax-a^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow\ y^2=\frac{b^2}{a^2}\cdot 2ax-\frac{b^2}{a^2}x^2$$

因爲橢圓的正焦弦長$p=\dfrac{2b^2}{a}$，長軸長$d=2a$

故得

$$y^2=px-\frac{p}{d}x^2$$

若雙曲線的右頂點在原點（0，0），則其方程式爲（如圖二）：

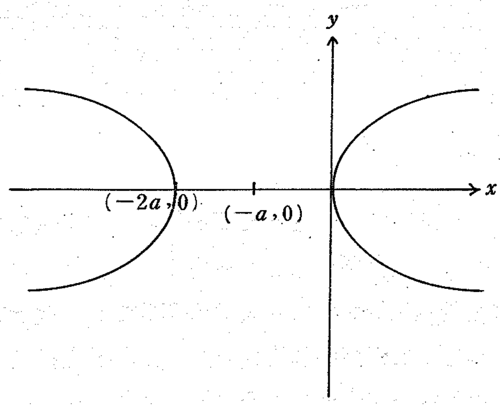


圖　二

$$\frac{(x+a)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow\ \frac{y^2}{b^2}=\frac{(x+a)^2}{a^2}+1=\frac{x^2}{a^2}+\frac{2a}{a^2}x$$

因爲雙曲線的正焦弦長$p=\dfrac{2b^2}{a^2}$，貫軸長$d=2a$

故　$$y^2=px+\frac{p}{d}x^2$$

2. 孟娜其馬斯（Menaechmus，大約B.C. 350年）

孟娜其馬斯是Eudoxus的學生，柏拉圖的朋友，亞歷山大大帝是他的學生。從數學史看，他是第一位研究圓錐曲線的人。

孟氏爲了解決倍積問題而發現了拋物線，橢圓及雙曲線。他當時所循的路是阿基塔斯（Archytas，大約B.C. 390年，第一位將幾何應用到動力學）所建議的：即考慮立體的截痕以求解倍積問題。在公元第五世紀時的雅典數學家普古魯斯（Proclus）稱讚說這三種曲線是孟氏所發現，並稱這些曲線爲“孟氏軌跡”。

孟氏在一個以直角爲頂角的直圓錐上作一個不過端點但垂直於任一母線的平面，則該平面與

圓錐的截痕爲一抛物線，孟氏純粹利用平面幾何的方法證明此抛物線可用 $y^2 = px$ 表示。（詳見〔 2 〕P. 27 ）

孟氏並且證明當圓錐的頂角由直角改變爲鈍角的時候，所得的截痕爲一雙曲線，其方程式爲:

$$y^2 = px + \frac{b^2}{a^2}x^2$$

如果頂角改變成銳角則截痕爲橢圓，其方程式爲：

$$y^2 = px - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

孟氏之前，希波科雷特斯（ Hippocrates，大約B. C. 430年，希臘人）爲了求解倍積問題，曾經給了該問題一個充分條件；考慮以 a 爲邊長的立方體 A，欲求一立方體，使其體積爲 A 的 2 倍。他說如果找得到正數 x ，y 使得 $a : x = x : y = y : 2a$ 則由第一個比例式，可得 $x^2 = ay$，由第二個比例式，可得 $2ax = y^2$。因此 $x^4 = a^2y^2 = a^2 \cdot 2ax = 2a^3x$ 即 $x^3 = 2a^3$。因此 x 即爲所求立方體的邊長，其體積爲所給立方體 A 的兩倍。從此以後，所謂的倍積問題就等於是求解上述的兩比例式的問題。

古希臘學者發現光使用沒有刻度的直尺及圓規根本沒有辦法求解此問題。事實上，這問題在兩千多年後（公元1882年）才被F. Lindemann證明它確實不可能。

孟氏曾給了倍積問題兩種解法。其中一種是利用兩抛物線的交點求解，另一種是利用一雙曲線及一抛物線的交點求解。其解法使用了抛物線的一般特性，及直交雙曲線（ $xy = a$ ）的漸近線性質。例如其抛物線法爲：

給定邊長 a 的立方體 A，欲作一個邊長爲 x 的立方體，使其體積爲 A 的 2 倍。則由前述，只要找到 x ，y 使滿足 $a : x = x : y = y : 2a$ 即可。由此得 $x^2 = ay$ 且 $y^2 = 2ax$ 。這兩抛物線的交點（ x ，y ）的 x ，y 即爲所求，如下圖三：

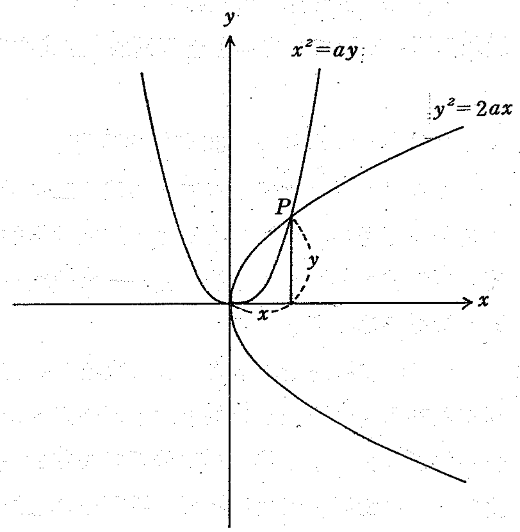


圖 三

孟氏從希波科雷特斯的倍積問題的充分條件知若 x ，y 滿足 $a : x = x : y = y : b$ 則

$x^2 = ay$ 爲抛物線

$y^2 = bx$ 爲抛物線

$xy = ab$ 爲直交雙曲線

不過並沒有資料指出孟氏是如何去求作他所需的抛物線及直交雙曲線。

圓錐曲線快速發展的時期是介於“孟氏軌跡”到“阿波羅尼斯所發表的二次錐線”，即大約B. C. 350 年到B. C. 250 年之間。這期間有許多希臘學者在這方面有貢獻，包括阿基米得、歐基里得及亞里士塔斯（ Aristaeus ）。在介紹阿波羅尼斯的偉大貢獻之前，先談談上述三人在圓錐曲線方面的成就。

3. 亞里士塔斯（ Aristaeus，大約B. C. 320 年）

裴波斯（ Pappus，大約公元 300 年）曾會稱歐基里得、阿波羅尼斯及亞里士塔斯三人爲希臘幾何學家中對幾何學的分析最有技巧的三人。亞里士塔斯在他所著“立體軌跡”一書中將圓錐截痕分爲三種，即銳角圓錐截痕，鈍角圓錐截痕，

以及直角圓錐截痕。

歐基里得曾說他所著幾何原本一書中“二次錐線”這一卷乃取材自亞里士塔斯的“立體軌跡”。

4. 歐基里得（大約 B. C. 306 年到 285 年）

歐基里得所著幾何原本的第四卷“二次錐線”是阿波羅尼斯所著“二次錐線”的前四册的基礎。一般相信，關於錐線的焦點——準線性質，歐基里得是第一位研究者。

不但阿波羅尼斯自稱其“二次錐線”的前四册是歐基里得的研究成果的整理，同時阿基米得也引用了許多歐基里得所提出的圓錐曲線的一般性質而不再證明。因此我們可以說阿波羅尼斯及阿基米得都是站在歐基里得的雙肩上以進行他們深一層的研究。歐基里得是他們的基底。

5. 阿基米得（Archimedes B. C. 312 年－250 年）

阿基米得與阿波羅尼斯是莫逆之交，阿基米得大約較年長25歲。

阿基米得利用錐體相交的方法求解三次方程式$x^3 \mp a x^2 \pm b^2 c = 0$，他同時成功地將拋物線方形化。

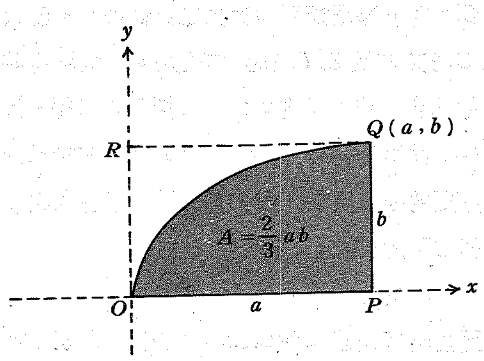


圖 四

阿基米得證明上圖四中拋物線 $x=y^2$ 與 x—軸，$x=b$，$x=0$ 所圍的面積等於外切矩形PQRO 的面積的⅔。這事實利用今天所知的積分可以很簡單地求得如下：

$$A=\int_0^a \sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}$$

因爲（a，b）在$x=y^2$上，故$a=b^2$，即$a^{\frac{1}{2}}=b$，因此

$$A=\frac{2}{3}a\cdot a^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}a\cdot b$$

不過當時阿基米得對此一性質所作的幾何證明比這精采多了。他總共用了七個定理而且充分的利用窮盡法證明了拋物線的片段$APBQC$（如圖五所示），其面積爲ΔABC的面積的4/3倍，其中ΔABC是以$\overline{AC}$爲底，而它的高也是拋物線片段$APBQC$的高。

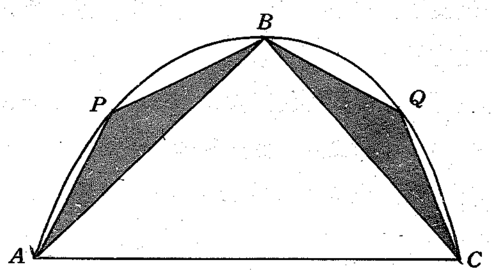


圖 五

阿基米得證明如果以AB，BC爲底，ΔAPB的高也是拋物線片段APB的高，ΔBQC的高也是拋物線片段BQC的高，則有

$$\Delta ABC\text{的面積}\equiv a\ \Delta ABC$$
$$=4\,(\,a\,\Delta APB+a\,\Delta BQC\,)$$

因此若令 $T=a\,\Delta ABC$

則拋物線片段$APBQC$的面積爲：

$$T+\frac{T}{4}+\frac{T}{4^2}+\frac{T}{4^3}+\cdots\cdots+\frac{T}{4^n}+\cdots \qquad (1)$$

其和爲$4/3\,T$。

當然在阿基米得的時代，對於極限是無法突破的，無窮級數的收斂性在當時一無所知，阿基米得所以知道(1)式的值爲$4/3\,T$，乃是利用窮盡法證明拋物線片段的面積不大於也不小於$4/3\,T$而得的。

阿基米得還利用拋物線及雙曲線求作正七邊形。另外他也研究過橢圓體及拋物體。

6.阿波羅尼斯(大約B.C. 225年)

歐基里得，阿基米得及阿波羅尼斯一般尊稱爲西元前三世紀時的三位數學巨人。阿波羅尼斯大約生於B.C. 262年。年青時就學於歐基里得的學生們。阿波羅尼斯在天文學上有莫大的貢獻，有天文學之父的美譽。同時他在二次錐線方面亦有執牛耳的成就。雖然孟氏、歐基里得、阿基米得都作過圓錐曲線，但集大成的却是阿波羅尼斯，他把圓錐曲線一般化，系統化了。

阿波羅尼斯作了一本書名爲“二次錐線”，共有八册，含有487個定理，將圓錐曲線探討得非常透徹。我們將這書簡述其內容於下：

第1册：

定義二次錐線並討論其基本性質。阿波羅尼斯純粹以幾何方法求出我們前面談畢氏時期所列的拋物線，橢圓及雙曲線的方程式。

除了錐線的定義外，阿波羅尼斯還定義了直徑與共軛直徑。設$\overline{PQ}$爲橢圓上的一弦，阿波羅尼斯證明所有在橢圓上平行於$\overline{PQ}$的弦的中點必共線，設該線爲AB(如圖六)。

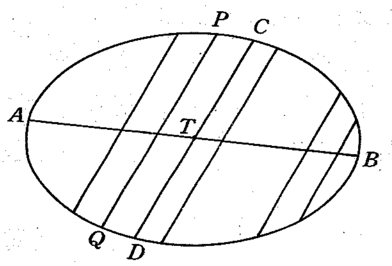


圖 六

過$\overline{AB}$的中點T作弦$\overline{CD}$與$\overline{PQ}$平行，則$\overline{AB}$稱爲對應於$\overline{PQ}$的直徑，$\overline{CD}$稱爲$\overline{AB}$的共軛直徑。

同理也可以定義雙曲線的直徑與共軛直線，和拋物線的直徑，如下圖七所示。

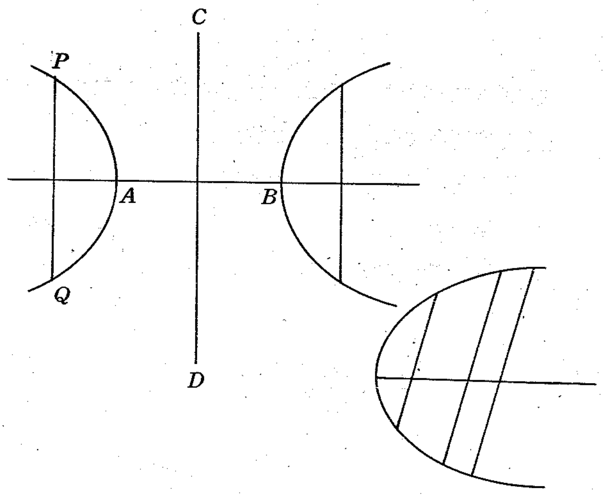


圖 七

阿波羅尼斯同時也處理切線問題，定義了圓錐曲線的切線：即與錐線僅有一共同點的直線，他證明在拋物線上，若PP'爲QQ'所決定的直徑，令$TP=PV$且$T-P-V$，則TQ必爲拋物線的一切線，Q爲其切點：(參看下圖八)

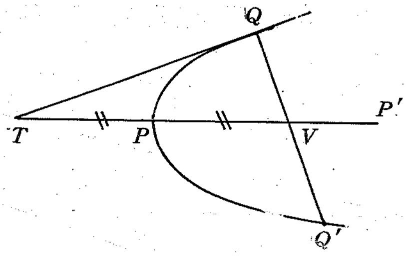


圖 八

第2册：如何作一拋物線的漸近線，如何找一錐線的直徑，有心錐線的心，拋物線的軸，有心錐線的軸。

例如：T爲橢圓外一點，TQ、TQ'爲切線；Q，Q'爲其切點；QQ'的中點爲V，則TV爲一直徑。(參看圖九)

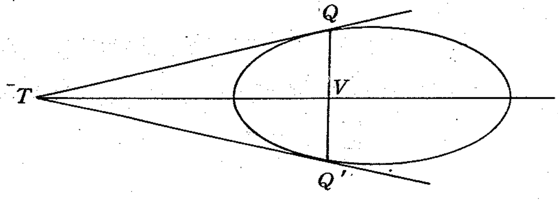


圖 九

或者作二平行弦，取其中點的連線，則爲直徑。任二直徑的交點是有心錐線的心。

第 3 册：主要結果之一如下：

圖十中，OP，OQ 爲橢圓的二切線，RS，$R'S'$ 爲二弦相交於 J，且 $RS /\!/ OP$，$R'S' /\!/ OQ$。

則 $\dfrac{RJ\cdot JS}{R'J\cdot JS'}=\dfrac{OP^2}{OQ^2}$

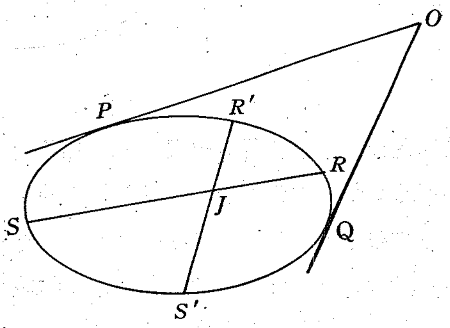


圖 十

本册中也談及極與極軸的調和性質，如圖十一所示：

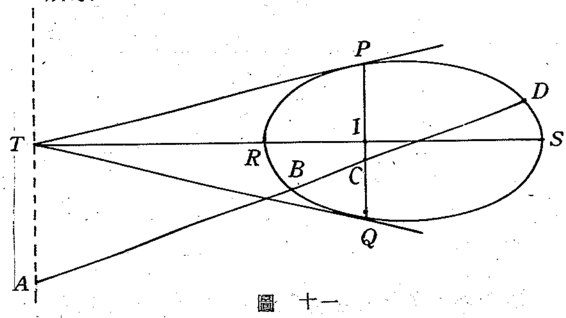


圖 十一

TP，TQ 爲橢圓的二切線，$\overleftrightarrow{TRS}$ 爲任一割線交橢圓於 R、S，交 PQ 於 I，則

$$\frac{TR}{TS}=\frac{IR}{IS}$$

PQ 稱爲 T 的一極軸，T，R，I，S 稱爲一組調和點。

若令 C 爲 PQ 中點，BCD 爲任意一線，交橢圓於 B，D 並交過 T 平行於 PQ 的直線於 A，則 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{CD}$

此時 TA 是 C 的軸，而 A，B，C，D 稱爲調和點（如圖十一）本册也論及有心錐的焦點，參看圖十二。

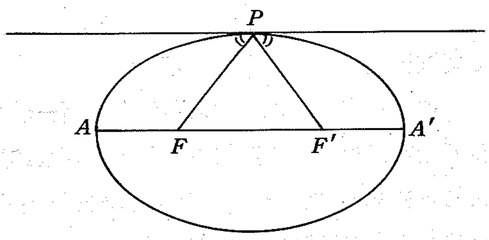


圖 十二

設 F，F^1 在有心錐的軸上且滿足

$$AF\cdot FA'=AF'\cdot F'A'=2p\cdot\frac{AA'}{4}$$

則 F，F' 稱爲該有心錐線的焦點，設 p 爲錐線上的任一點，則在橢圓時有 $PF+PF'=AA'$，在雙曲線的情形有 $|PF-PF'|=AA'$。

第 4 册：本册更深入地討論極與極軸的問題。

第 5 册：本册在全書中最具創造性。討論如何由一定點到錐線作最短和最長的線段。

第 6 册：討論錐線與其上線段的相似性。阿波羅尼斯可以在一個直角錐上取一錐線與一已知錐線相等。

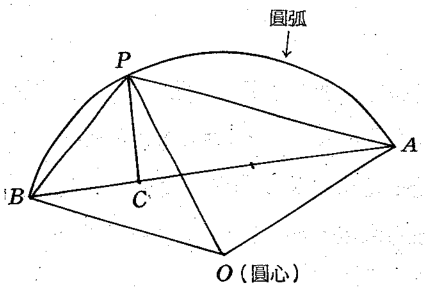
第 7 册：討論一些共軛直徑的性質。

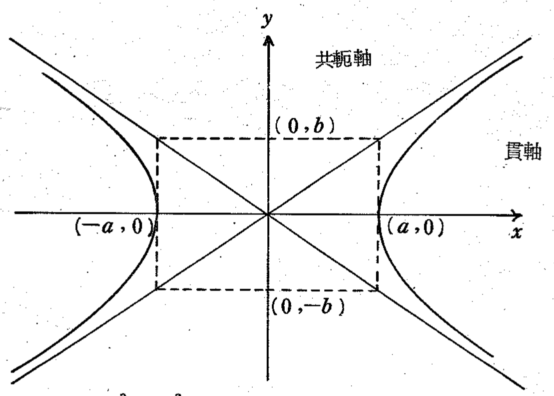
第 8 册：已遺失。

7. 裴波斯（Pappus，大約公元 320 年，希臘人）

裴波斯整理了前人的作品，如高維曲線，方圓問題，倍積問題，三等分角問題和分析方法等等。將紀元前的希臘古典幾何學整理並新添了些結果。

裴波斯利用求一圓及一雙曲線交點的方法將一角三等分，如下（圖十三）。





$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，其中$2a=AC$，$2b=\sqrt{3}AC$

圖　十三

裴波斯的方法是將所給的已知角的頂點置於一圓的圓心O，設$\angle AOB$全等於已知角，他將弦$\widehat{AB}$三等分，C點爲一三等分點，即$2BC=AC$。接著他作了一雙曲線，其貫軸長爲AC，共軛軸長爲$\sqrt{3}AC$。若此雙曲線與弧$\widehat{AB}$的交點爲P，則$\angle PBA=2\angle BAP$且$\angle POA=2\angle BOP$，故已將$\angle BOA$三等分。

三、後語

從我們的點將錄中，可以看出在圓錐曲線上下工夫最深的是天文學家阿波羅尼斯。跟許多其他漂亮、有用的數學產物一樣，圓錐曲線也是數學家們爲了解決某些問題的過程中所研究出的副產品。比如說非歐幾何學是集許多數學家爲了求證歐基里得的第五公設（平行公設）的心得，最後在公元19世紀所爆發出的副產品一樣。阿波羅尼斯所以能整理出一套精美的“二次錐線”，前人的點點滴滴的匯集是非常重要的。這對研究數學的朋友是一種鼓勵，您的幾粒砂，可能是成塔所必需的。

〔作者現職：國立臺灣師範大學數學系副教授〕

參考資料

〔1〕Parr, J.M.; Conic Curves as Conceived by the Greeks, School Science and Math. March, 1977, P.214～P.225

〔2〕王懷權，幾何學發展史，協進圖書有限公司。

註：1. 裴波斯的這作法的證明，請參閱［1］P.222

2. 一般而言，三等分一任意角是不能作圖的。裴波斯的作法中已不僅光使用沒有刻度的直尺及圓規了，不能算是幾何作圖法。

（上接 34 頁，某些數量問題的圖解）

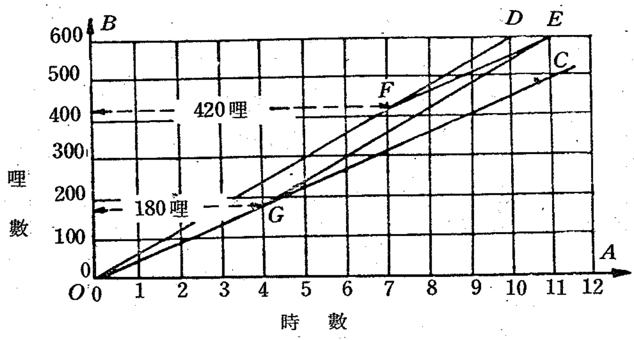


圖　九

過E點作$EF \parallel OC$且交OD於F點；過E點作$EG \parallel OD$且交OC於G點。則E點與G點之縱座標（分別爲420與180）即爲分別以60哩/時與45哩/時兩速度旅行的哩數。

〔作者現職：國立臺灣師範大學數學研究所副教授〕

參考資料

Dickson, L. E., New First Course in the theory of Equations, John Wiley and Sons, N.Y., 1930, P 6－7.

Hess, Adrien L., Pictorially Speaking, Texas Mathematics Teacher, March 1973-XX: 6－6

Levens, A. S., Graphics－Analysis and Conceptual Design, 2nd edition, John Wiley and Sons, N.Y, 1968, PP. 263－285.

備註：方程式$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x}$與$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{x}$之圖解與原文略有出入，修改的目的在使得它更能涵蓋一般的情形並將原來的方法加以進一步簡化。