由"先乘除後加減"的運算規則談起

黃敏晃 國立臺灣大學

一、先乘除後加減

在算術四則運算裡，有一個大家都知道的規則：在一個只含加、減、乘、除等四則混合運算的算式中（如果沒有括號），則應該先乘除後加減。例如：

$$13-4\times 2+6\div 3-5=13-8+2-5=2$$

在這個運算規則中，顯然把加法與減法當作一類運算，乘法與除法當作另一類。在運算的操作順序上，則是後一類的運算比前一類的運算優先作。由此就產生了下列問題：

① 運算的分類標準是如何定的？

② 各類運算的操作順序又是如何決定的？

讀者不難猜到第一個問題的答案：加法與減法互爲逆運算，而乘法與除法也互爲逆運算（下兩式中，符號"↔"表示它兩邊是同一回事）。

$$a+b=c \Leftrightarrow c-a=b$$

$$(\text{若}\ a\neq 0)\ a\cdot b=c \Leftrightarrow c\div a=b\ (\text{若}\ a\neq 0)$$

所以把互爲逆運算的運算歸爲一類，就是分類的標準。要回答第二個問題則比較複雜些，得由乘法與除法的意義，源源本本的談起。

二、乘法與除法

在數的運算中，加法與減法可以說是最原始的，乘法與除法則是由加法與減法演變出來的。讀者一定老早就發現：當相加的數很多時，不但算式寫起來長，計算也很煩人。對我們的老祖先，這件事當然不是什麼秘密，尤其是他們得把算式刻在竹簡上，炙在羊皮上，並不像我們寫在紙上那樣方便。這種不便，逼使他們想辦法改進。

經過長時期的研究，他們發現：加數都相等時的加法是關鍵所在（這與貿易的興起有關，人類生產力增加，分工較細時貿易就發生了。假定你經常需要算"3隻鷄換一件衣服，5件衣服要用幾隻鷄來換？""4隻羊換一頭牛，3頭牛需要幾隻羊？"之類的問題，你也會發現這個重要關鍵的），於是用特別的記號來表示這種加法，就得到了乘法運算。例如，4×5 表示5個4相加。

$$4\times 5=4+4+4+4+4=20$$

把這種運算的結果列成表來用，乘法表也就這樣子應人類的需要而產生了。

有了乘法運算與符號以後，許多繁長的加法算式，就可以寫成簡短的乘式，計算也因乘法表的存在而變的容易些（熟悉加法和乘法運算的小學生，都願意計算下面的②式，而不願計算①式）。例如，下面的①式中，2出現4次，5出現3次，所以可以簡化成②式

$$2+5+2+2+5+5+2 \cdots\cdots ①$$

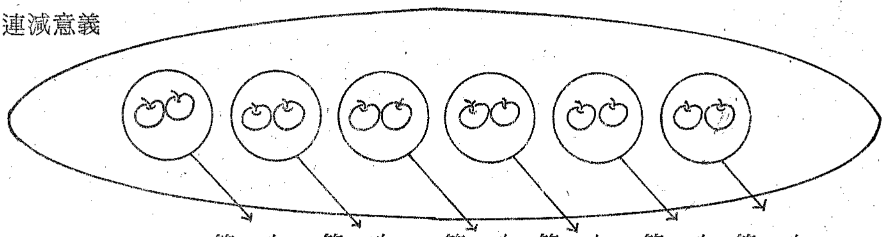
$$=2\times 4+5\times 3 \cdots\cdots ②$$

注意到，這裡我們以爲需要用到的加法交換律，是我們的祖先都認爲不需要特別加以注意的事情，他們認爲①式改寫成②式是理所當然的。只有到人類發明了一些交換律不能成立的不很理想的運算（例如矩陣的乘法運算）後，人類才覺得有需要回頭，把加法滿足像交換律等這樣好性

質的事情明白的點出來。數學發展史一再的指出，最重要的數學發展，都是由“人類的需要”來推動的。我們很可以從這種歷史的觀點來檢討，中小學數學教材內容中，强調像加法交換律這類性質，是否有這樣的需要？

讓我們拉回到原先的討論課題。由①式改寫成②式是一種簡寫，所以我們可以說，乘法是加法的簡寫。同理，除法是減法的簡寫，例如：$12 \div 2 = 6$ 是12減2連減6次等於0的簡寫（以小學生的方法來解釋：$12 \div 2 = 6$ 是12個桔子，每天吃2個可吃6天；而用具體的操作來解決這個問題時，是由12個桔子中每次拿走2個——即每次減2——可拿6次，即 $12-2-2-2-2-2-2=0$，所以 $12 \div 2 = 6$ 就是這個連減式的簡寫）。

除法的連減意義



乘法與除法既然是加法與減法的簡寫，一個含有加、減、乘、除等運算的式子中，實際上隱含着括號在內：

$16-2\times 3+8\div 4$

$=16-(2+2+2)+$（8減4需連減幾次才等於0）

所以，在運算的操作順序上，就應該先作乘除法，然後再作加減法。

三、乘方與開方

仿照上面的作法，當相乘的數都相等時，我們可以用乘方來簡寫。例如，8^4 與 5^3 依次表示4個8相乘，與3個5相乘，即乘方是乘法的簡寫：

$8^4=8\times 8\times 8\times 8$，$5^3=5\times 5\times 5$

有了乘方運算後，有些繁長的乘式就可以簡化。例如：

$5\times 5\times 8\times 8\times 5\times 8\times 8$

$=8^4\times 5^3$

同理，開方也可以看成是除法的一種簡寫，例如 $\sqrt[3]{8}=2$ 是 $8\div 2\div 2\div 2=1$ 的簡寫。乘方與開方的引入，不但簡化了算式的寫法，同時也簡化了計算（平方、立方表、開平方、開立方表以及後來由這兩種運算進一步引出的指數函數，對數函數，而產生的對數表與計算尺，都是明證。這裡再度指明，人類往簡化計算方面所作的這些努力，也是由於航海的“需要”來推動的）。

乘方與開方既然是乘法與除法的簡寫，在一個含有加、減、乘、除、乘方與開方的式子中（如果沒有括號），計算操作的順序就應該是以乘方與開方爲優先，乘法與除法其次，最後才作加法與減法（注意，有括號時，得按照有括號的規則。其實括號就是分段計算的意思，在每個括號內應按上述的操作順序計算）。總結上述的討論，我們可以說：

1. 數的運算是一級一級引出來的，首先是加法與減法爲第一級運算，由第一級運算的簡寫，引出了第二級的乘法與除法運算，再由第二級運算的簡寫，引出了第三級的乘方與開方運算。

2. 在一個計算式子中（若沒有包含括號），則計算操作的順序，應該是越高級的運算優先作，然後再作較低級的運算。

到此，聰明的讀者諒已暗暗自問：如果由第一級運算的簡寫，可以引出第二級的運算，由第二級運算的簡寫，又可引出第三級的運算，那麼，我們可不可以由第三級運算的簡寫，引出第四

級的運算呢？這樣引出來的第四級運算，到底是怎樣的運算？爲什麼我們以前沒聽說過第四級的運算？

四、第四級的運算與結合律

爲了討論的方便，讓我們用符號①，②與③分別表示加法，乘法與乘方運算，則它們之間的進級引導關係是這樣的

$$a①b=a+b$$

$$a②b=a\times b=\overbrace{a+a+\cdots+a}^{b\text{ 個 }a}=\overbrace{a①a①\cdots①a}^{b\text{ 個 }a}$$

$$a③b=a^b=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{b\text{ 個 }a}=\underbrace{a②a②\cdots②a}_{b\text{ 個 }a}$$

同理，我們用符號④代表由③引導出來的第四級運算，仿照上面後兩式的關係，我們應該有

$$a④b=\underbrace{a③a③\cdots\cdots③a}_{b\text{ 個 }a}$$

但這樣的關係太抽象了，尤其是上式的等號右邊。我們不妨算幾個具體的例子看看

(1) $a=1$時，$1④b=1③1③\cdots\cdots③1=1$

(2) $b=1$時，$a④1=a$

(3) $b=2$時，$a④2=a③a=a^a$

(4) $a=2$，$b=3$時，$2④3=2③2③2=2^{2^2}$ $=16$

(5) $a=3$，$b=3$時，$3④3=3③3③3=3^{3^3}$ $=?$

上例中的(1)，(2)，(3)與(4)都沒有問題，但(5)却小有問題：3^{3^3} 到底是多少？我們有兩種計算方式

(甲) $3^{3^3}=(3^3)^3=27^3=3^9=19683$

(乙) $3^{3^3}=3^{(3^3)}=3^{27}=94143178827$

這兩個數相差非常之大，到底應該取那一個呢？而且，爲什麼會發生這種困難呢？這種困難是否可以克服？

上述困難之所以發生，主要的原因在於第三級的運算不滿足結合律。要知道對一種運算而言，最重要的好性質就是結合律；例如三數相加時，因爲加法滿足結合律，所以先加前兩數，或先加後兩數都得到同樣的結果，括號才能夠省略掉，即符號 $a+b+c$ 有唯一的意義

$$a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$$

同理，因爲乘法滿足結合律，符號 $a\times b\times c$ 才有唯一的意義

$$a\times(b\times c)=(a\times b)\times c=a\times b\times c$$

利用數學歸納法，我們可以證明：有限個數相加（或相乘）時，並不需要括號，因爲那兩個連續的數先加（或乘）不會影響最後的結果。

注意到，當我們定義乘法與乘方時，加法與乘法滿足結合律的條件是必須利用到的，只是我們沒有明確的提出來罷了：若 $a+(a+a)\neq(a+a)+a$，則 $a+a+a$ 就沒有唯一的意義，$a\times 3$ 的定義就得由 $a+(a+a)$ 與 $(a+a)+a$ 中選一個了。同理，若 $a\times(a\times a)\neq(a\times a)\times a$，則 $a\times a\times a$ 沒有唯一的意義，則 a^3 的定義就得由 $a\times(a\times a)$ 與 $(a\times a)\times a$ 中選一個出來。但因爲加法與乘法滿足結合律，上述的考慮都是多餘的，這就是我們能自由自在定義乘法與乘方的緣故。由此可見結合律對運算的重要性。

第三級的乘方運算並不滿足交換律，前面提到的例(5)已經顯示的很明白，下面再算一個例子

$$\left.\begin{array}{l}(2③3)③4=(2^3)^4=2^{12}\\ 2③(3③4)=2^{(3^4)}=2^{81}\end{array}\right\}\text{所以不相等}$$

一般說來，符號 $a③b③c$ 有兩種不同的意義，符號 $a③b③c③d$ 則有5種不同的意義，即

$[(a③b)③c]③d$，$[a③(b③c)]③d$，$(a③b)③(c③d)$，$a③[(b③c)③d]$，$a③[b③(c③d)]$

如果設符號 $a_1③a_2③\cdots\cdots③a_n$ 有 $F(n)$ 種不同的意義，則不難算出 $F(1)=1$，$F(2)=1$，$F(3)=2$，$F(4)=5$。利用數學歸納法，我們還可以得到下列的巡廻關係（請參看楊獻猶編譯的排列與組合第十一章，中央書局出版）

$$F(n)=F(1)F(n-1)+F(2)F(n-2)+\cdots\cdots+F(n-1)F(1)$$

利用這個巡廻關係不難求出，$F(5)=14$，$F(6)=42$，$F(7)=132$，可見這些數目增加的非常快。

在定義第四級的運算時，第三級運算的結合律，當然並不是絕對必要的，只要我們能得到在運算時不致產生矛盾的定義就可以了。譬如說，假定我們規定幾個數作第三級運算時，一定從最前面的兩個數作起，即

$$a③b③c=(a^b)^c$$

則第四級的運算就可以定義了（當然，若我們規定由最後兩個數先作運算也是可以的）。在這種規定下的第四級運算，不會滿足結合律，交換律等優良性質是顯而易見的，甚至於像乘方所滿足的指數定則那樣的性質都沒有。有興趣的讀者不妨自己試試看，這樣規定下的第四級運算，有些什麼樣的性質？

五、人類的需要與數學

從理論上說，不但第四級的運算可以定義，第五級、第六級的運算，甚至於第 n 級的運算，都可以利用數學歸納法依次定義出來（任何有高中程度以上的人都可以自行做出來）。但數學的內容中爲什麼不談這些東西？問題在於：這樣定出來的高級運算，有沒有實質上的意義？對人類有什麼用處？

如果一個數學內容沒有實質上的意義（因此對人類沒有用處），如同我們剛才定義的高級運算那樣，就無法得到繼續發展下去所需要的刺激與慣量，而遭到淘汰。我們在前面指出（這裡再重覆一次），從歷史的觀點看，重要的數學發展，都是應人類的需要，爲解決某些問題而產生的。數學是人創造出來的，把數學當作一門嚴肅的學問來看，數學內容的決定則不是漫無目的的。這點在中小學的數學內容中（甚至到大學一年級的微積分），都可以看得很清楚。在越高深的數學領域中，這種關連性越間接也越不明顯，但即使在最前線的數學研究中，這種傾向還是存在的。

一個正在學或教數學的人，若不懂得數學的這種基本精神，他常會把數學誤解成，在一套假定的規則（定義，公理與公設）下，尋找一些外行人不關心的性質與規律的一種符號遊戲。這種誤解常使數學的教與學，產生了方向上的偏差。我認爲只有在教數學的人徹底的了解這種精神，並努力的在教學上表達出來，使學生能領會這種精神，才能使數學教育走上正途。

（上接 10 頁，行政院召開科學技術會議）

第一小組委員有科指會主任吳大猷，中央研究院長錢思亮，教育部長李元簇，台大校長閻振興，政務委員李登輝，並由台大校長閻振興擔任召集人，分成四個分組，包括：①科技研究發展經費，由國科會副主任委員張去疑主持；②科技人才培育訓練羅致及利用分組，由教育部次長朱滙森主持；③科技構分工協調及組織管理分組，由國科會國際合作組長王紀五主持；④科技與社會經濟交互影響，由國科會人文社會科學組長華嚴主持。

第二小組委員有經濟部長孫運璿，台北市議會議長林挺生，中山科學院長唐君鉑，清華大學校長張明哲，並由經濟部長孫運璿爲召集人。本小組分成六個分組，包括：①電子工業由電訊總局長方賢務爲召集人；②電機工業由台電公司總經理朱書麟主持；③金屬機械由工業技術研究院副院長顧光復主持；④化學及冶鍊工業由清華大學校長張明哲主持；⑤紡織工業由華隆公司董事長呂鳳章主持；⑥食品工業由食品工業發展研究所長馬保之主持。

第三小組委員有農復會主委李崇道，農林廳長張訓舜及農復會委員蔣彥士。本小組分成四個分組，包括：①農業由省農試所長萬雄主持；②林業由材務局長徐學訓主持；③漁業由漁業局長姚道義主持；④畜牧由農林廳長蘇振杰主持。

第四小組委員有經濟部次長張光世，衛生署長王金茂。本小組分成五個分組，包括：①礦業由經濟部礦業司長吳伯楨主持；②能源由經濟部次長張光世主持；③水資源由水資會主委薛履坦主持；④環境由衛生署長王金茂主持；⑤醫藥衛生由衛生署副署長張智康主持。