

英國 SMP 初中數學教材研究

黃敏晃 國立臺灣大學

一、前言——在英國，適用於初中階段的 Prelude 與 Interlude 的意義，在教材的組織部數學教材不少，SMP 只是其中之一。SMP 這部分，會加以說明。

套教材，雖然在教材的選擇方面作了比較大膽的嘗試，大量的捨去了傳統的代數教材，並加入了許多較新的幾何教材，但我們覺得，其教材的實用性較高，而且其組織與表現方式比較適合國中階段學生的學習。這是我們選擇這套教材來研究的理由。

SMP (School Mathematics Project) 是由 1961 年就開始的計劃，在 1966 年開始出版課本，由劍橋大學出版社出版 (Cambridge at the University Press)，後來經過幾次改版。我們採用的是 1971 年版，共 8 冊課本，適合 11 歲到 15 歲學生，分四年使用。這個年段是我國學生由小學六年級到國中畢業的年紀，剛好這套教材中有一部份的教材是屬於我國小學五六年級的教材，扣除這些教材後，差不多是三年的教材 (每週以五小時計)。

本文的組織以下列的次序展開：教材內容，內容的分析，教材的組織與表現方式，最後在總結中，提出本小組研究後的意見。

二、教材內容——為了方便於看到教材的組織，下面從第 1 冊到第 8 冊，按其原單元順序，把教材內容列出，後面在中括號註出內容的分類作為參考，其中註上小學者是為我國小學中的教材。又下面的數號中，(1—3) 表示第一冊第 3 單元，(2—P) 表示第二冊的 Prelude，(3—I) 表示第三冊的 Interlude 等。至於

(1—P) . 釘板上幾何圖形的操作，複習簡單的幾何圖形，並留下坐標，圖形線對稱與點對稱的伏筆 [幾何，部分小學]。

(1—1) . 自然數的數型 (長方數與正方數) [代數，部分小學]。

(1—2) . 坐標 (限全數的坐標)，地圖的地點的位置，格子點上的圖形， $X=3$ ， $Y=2$ 的圖式與其交點， $X>4$ ， $Y<2$ 等的平面區域 [代數]。

(1—3) . 角度，旋轉，直角，角度與量角器，以實驗方式驗證一些三角形的性質 (如三邊，二邊夾一角，二角夾一邊等決定一個三角形，三角形內角和為 180°) [幾何]。

(1—4) . 進位法，除 10 進位外，另舉了 12 進位 (吋與呎)，16 進位 (噸與磅) 的例子，後來着重 5 進位法的說明。全數的四則計算 [代數，部分小學]。

(1—5) . 圖形的線對稱與圖形的中分線，旋轉對稱 [幾何，部分小學]。

(1—I) . 多重同心圓內的圖案設計 [幾何]。

- (1-6). 分數，同分母分數的加減〔小學〕。
- (1-7). 多邊形的名稱；方格紙上多邊形頂點的坐標；形內，形上，與形外；多邊形的內角和；正多邊形〔幾何〕。
- (1-8). 倍數與公倍數，質數與因數分解，三角數〔代數，部分小學〕。
- (1-9). 除法的連減意味，除法與分數的關係〔小學〕。
- (1-10). 多面體的平面圖解與製作（簡單的）〔幾何，部分小學〕。
- (2-P). 連續圖案與幾何圖形〔幾何〕。
- (2-1). 文字代表數，集合與子集，公式〔代數〕。
- (2-2). 連續圖案中的幾何圖形，與其對稱性〔幾何〕。
- (2-3). 長度的測量，小數的加減，四捨五入〔小學〕。
- (2-I). 數的標示意義（如 203 表示某大樓第二層的第 3 個房間）〔小學〕。
- (2-4). 面積的估算，長方形的面積〔小學〕。
- (2-5). 等值分數，通分與約分，分數的大小比較〔小學〕。
- (2-6). 角度與方位，航海圖上的作業，雷達幕上的判讀〔幾何〕。
- (2-7). 關係與映射（Mapping），有序數對〔代數〕。
- (2-8). 十二進位與二進位，電算初步原理〔代數〕。
- (2-9). 調查與柱形圖表，圓形圖表，如何作調查計劃〔統計，部分小學〕。
- (2-I). 有關方格子上點移動的遊戲〔幾何〕。
- (2-10). 有號數，海拔，班上同學的身高，平均數，整數的數軸〔代數，部分小學〕。
- (2-11). 簡單平面圖形的拓撲變換，平面上圖形結點，弧與平面區域的不變性，一筆畫，內部與外部，四色問題〔幾何〕。
- (3-P). 平面上圖形的移動〔幾何〕。
- (3-1). 平行四邊形與三角形的面積，直線形的面積〔幾何〕。
- (3-2). 有號數的加減計算與數軸上的圖示〔代數〕。
- (3-3). 映射與其圖形（函數），以線函數為例〔代數〕。
- (3-I). 一些多面體的平面圖解與製作〔幾何〕。
- (3-4). 小數的乘除計算〔小學〕。
- (3-5). 平面上的角坐標系， $X = -2$ ， $Y = -3$ ， $Y > X + 4$ 的圖示〔代數〕。
- (3-6). 鏡射與線對稱〔幾何〕。
- (3-7). 平面上的網路（net work），有向網路與其矩陣表示〔代數〕。
- (3-8). 旋轉與正負角度，旋轉中心〔幾何〕。
- (3-9). 計算尺操作與製造〔代數〕。
- (3-I). 一個位移與時間關係的實例〔代數〕。
- (3-10). 角度與方位〔幾何〕。
- (3-11). 代表值，中位值與平均值〔統計〕。
- (3-12). 立體形體的面對稱〔幾何〕。
- (4-P). 利用簡單平面圖形的移動操作，製造一些運動群（Group）的運算表，顯示運算的封閉性，么元（Identity），逆運算元素（Inverse）等〔代數〕。
- (4-1). 分數的乘除運算〔小學〕。
- (4-2). 圖形的放大，相似，位似形與放

大率〔幾何〕。

(4-3) . 有號數的乘除運算〔代數〕。

(4-4) . 向量與其幾何意義，平移〔幾何〕。

(4-I) . Envelope 出的一些圖形〔幾何〕。

(4-5) . 計算式中的括號與運算次序；簡單代數式的運算，運算的流程圖與映射〔代數，部分小學〕。

(4-6) . 線性關係與其在坐標平面上的圖示〔代數〕。

(4-7) . 比與比例，簡單的數值比例式，相似形的對應邊成比例〔代數，部分小學〕。

(4-8) . 多值映射與單值映射，逆映射〔代數〕。

(4-I) . 一種英國銅板的幾何圖形與另一種幾何遊戲〔幾何〕。

(4-9) . 三維空間中的線對稱與旋轉對稱〔幾何〕。

(4-10) . 百分比〔小學〕。

(4-11) . 坐標平面上圖形的解釋，各種價表的讀法〔代數〕。

(4-12) . 巴斯葛三角與費布那齊數列〔代數〕。

(5-P) . 填滿空間的立體形體〔幾何〕。

(5-1) . 直角△與畢氏定理〔幾何〕。

(5-2) . 點集合與數集合，集合的文氏圖解〔代數〕。

(5-3) . 矩陣（當作儲存資料的表現），其加法與乘法〔代數〕。

(5-4) . 擲銅板或骰子的實驗，點數和的分布，成功百分比〔機率〕。

(5-I) . 用批評的眼光看統計圖表〔統計〕。

(5-5) . 平方根的意義與計算（用不等式）〔代數〕。

(5-6) . 利用如下之流程圖解，如 $2x - 3 = 5$ 的方程式〔代數〕。

$x \rightarrow \boxed{\text{乘}2} \rightarrow \boxed{\text{減}3} \rightarrow 5$

$4 \leftarrow \boxed{\text{除}2} \leftarrow \boxed{\text{加}3} \leftarrow 5$

(5-7) . 簡單的樣本空間與事件的機率，機率一樣的事件，實驗機率與理論機率的關係〔機率〕。

(5-8) . 計算尺的製作原理，概略值，與計算尺的使用法則〔代數〕。

(5-I) . 紙上圖形放大的一個實例〔幾何〕。

(5-9) . 體積單位，長方體與角柱的體積〔小學〕。

(5-10) . $10^\circ, 20^\circ, \dots, 80^\circ$ 等的正弦與餘弦（名詞未出現）函數值〔三角〕。

(5-11) . 圓與其各部位名稱，圓周的度量， π 的概值，圓內接，外切正多邊形（限於 4, 6, 8 邊形）〔小學〕。

(5-12) . 平面上網路與多面體的尤拉公式（實驗性質）〔幾何〕。

(6-P) . 謎語解法的流程圖〔代數〕。

(6-1) . 表現網路的矩陣，矩陣的乘法〔代數〕。

(6-2) . 小數與分數的互化，循環小數〔小學〕。

(6-3) . 平面變換的合成〔代數〕。

(6-4) . 銳角的 Sine 及 Cosine 的值，查表〔三角〕。

(6-I) . 一個棋盤上的遊戲〔幾何〕。

(6-5) . 矩陣表現關係，Transpose 矩陣的意義〔代數〕。

(6-6) . 代數式的值，與非線性函數的例子與圖形〔代數〕。

(6-7) . 頻率表與選階〔統計〕。

(6-8) . 相似形體的長度，面積與體積〔幾何〕。

(6-I) . 一種錢幣的圖形〔幾何〕。

(6-9) . 逆運算與逆元素，解一元一次方

程式〔代數〕。

(6-10). 矩陣與幾何的線性映射〔代數與幾何〕。

(6-11). 利用機率例子說明問題(方程式與不等式)與解集合〔機率與代數〕。

(6-12). 計算機與程式, 實習〔計算機〕。

(7-P). 幾種古老的計算工具〔代數〕。

(7-1). 動點的軌跡, 中垂線與角平分線〔幾何〕。

(7-2). 計算尺使用的流程圖〔代數〕。

(7-3). 複合事件與樹狀圖〔機率〕。

(7-4). 圖面積與 π , 扇形面積, 圓柱體的體積與表面積〔小學〕。

(7-5). 同積異形的斜角仿射變換與其性質〔幾何, 部分小學〕。

(7-6). 利用正餘弦解三角形〔三角〕。

(7-7). 日常生活中出現的公式(主要為線性)〔代數〕。

(7-8). 矩陣與線性變換, 逆變換與逆矩陣〔代數與幾何〕。

(7-I). 計算與測量〔代數〕。

(7-9). 百分比的計算與實用〔小學〕。

(7-10). 波與正餘弦函數的圖形〔三角〕。

(7-11). 利用流程圖解 $2\left(\frac{6}{x}+3\right)=10$ 型的方程式〔代數〕。

(7-12). 總計, 頻率表, 頻率曲線, 與 Cumulative 頻率曲線〔統計〕。

(8-P). 三維空間上的形體與曲線〔幾何〕。

(8-1). 直線的斜率〔代數〕。

(8-2). 線性變換的合成〔幾何與代數〕。

(8-3). 斜率與角度, 正切函數〔三角與代數〕。

(8-4). 曲線下的面積, 意義與計算〔代數〕。

(8-5). 成績中 Middle half 的意義, above 或 below average 有無意義(利用 cumulative 頻率曲線作

解釋)〔統計〕。

(8-6). 線性規畫〔代數〕。

(8-7). 到(8~15)為以上各類型教材的形式化複習單元(註)。

(註): 由於英國各級(低於大學的)學校畢業後, 學生要參加會考, 所以這套書第8冊的下半冊各單元, 全部是複習單元, 作為學生準備考試之用。

三、內容的分析——根據以上所羅列的, 不難看出其教材的選擇, 與我國傳統的國中數學教材, 有很大的差異。其中與我國小學數學教材的單元是:(1-6), (1-9), (2-3), (2-I), (2-4), (2-5), (3-4), (4-1), (4-10), (5-9), (5-11), (6-2), (7-4), (7-9), 而部分為我國小學教材的單元是:(1-P), (1-1), (1-4), (1-5), (1-8), (1-10), (2-9), (2-10), (4-5), (7-5)。這些教材差不多構成一學年的教材, 剩下來的教材剛好適合三學年。下面列出與傳統國中數學教材作比較不同的地方:

甲、代數方面——所佔的百分比比較傳統的少, 而且傳統的材料如二元一次方程式, 一元二次方程式, 多項式的運算、因式分解、分式與分式方程等都沒有出現, 比較形式化的比例與開方法不講授。但出現了較多利用流程圖解方程式的材料, 而且對運算的形式性質比較重視, 如封閉性、逆運算、逆元素、么元、關係、關係的圖示、映射與矩陣等都出現了。

乙、幾何方面——傳統的歐基里得平面幾何幾乎不出現, 取代的是材料可分成兩類, 一類是操作性的材料(實驗幾何, 連續圖案, 多面體的平面圖解與製作, 對稱與鏡射的操作), 另一類是線性映射(剛體運動, 圖形的放大與變形, 這些通常放在高中或大學的線性代數), 網路與拓撲變形等, 而且這些材料選與代數中的矩陣配合。

丙、統計與機率——統計是許多外國教材都比我國重視的部分, 這是由於外國人在日常

生活中對於統計常識的需要。但這套書的統計部分顯然的更加重些，如 cumulative 頻率等。另外在機率方面選材也比許多外國教材深些，如樹狀圖等通常是列在高中的。

丁、計算機方面——計算機在數學教育方面的角色，在西方工業先進國家已經開始佔較重要的角色，主要的原因是計算機的廣泛用途。這套書顯然認為計算機是將來人類的主要工具，所以有系統的介紹了從古到今的計算器械，並列一單元教學生寫程式並且實際操作電腦。甚至解方程式也要用流程圖的方式處理。

總的來說，SMP 教材從傳統國中教材中刪去的，是較注重抽象的推理過程的歐幾里得幾何，以及較形式化的代數內容；除此之外，由於介紹計算器械，所以把各種較繁雜的計算教材（如開方法）也一併刪去。

較注重抽象推理過程的歐幾里得幾何，與較形式化的代數內容的刪去，也許是受到瑞士心理學家皮亞傑有關學童心智發展分階理論的影響。皮氏認為抽象的思考與形式化的操作能力，學童要到 15 歲以後才成熟，12 歲到 15 歲是這方面能力的啓蒙期而已。

這套書中雖然另外增列了一些，看起來很抽象或較形式化的教材，如運算的封閉性，逆映射，線性映射，關係，網路與尤拉公式，以及流程圖，矩陣與線性映射的關係等，但其處理的方式都是透過具體的操作，或簡單的數值計算；而且抽象性與形式化的加重是漸進的，許多較形式化的總結與歸納，都放在第 8 冊下半冊的複習單元。由此可見編者對心理學理論的服從（註）。

〔註〕：這套教材內，與我國小學教材重合的部分則是算術中比較形式化的計算材料，可見他們儘量把形式化的材料延後教學。

這裡還有一點可以順便指出的，是關於拓撲變形，網路與多面體的尤拉公式的出現。這些教材是我國中學教師較不熟悉的，以往都放在大學拓撲學課內。這套書中對這些教材的處理固然如上段所提，是透過具體的操作，但這些教材的出現，可能又是編者對心理學理論服從的另一例證

；心理學有一種說法，認為兒童對外在世界的看法，首先是拓撲的（topological 即直線沒意義），其次是射影的（projective 即直線有意義，但無距離的概念），最後才是 metric（即直線與距離都有意義，即歐幾里得幾何的看法）。詳察人類對幾何的課程則是倒過來的，在中學先學歐幾里得幾何，大學數學系二年級才有射影幾何，三年級才有拓撲幾何（註）。這點是許多研究兒童心智發展的心理學家，所最感困惑的一件事。拓撲教材的出現可能受到上述理論的影響。

〔註〕：歐氏幾何，射影幾何，拓撲幾何課的順序，是按照這些材料在數學發展史的順序。至於為什麼數學上的發展，會與兒童心智發展的順序倒置，則是有趣的問題，可以留給數學史家與心理學家合作解決。

這裡需要指出，任何數學教材課本的編者，並不一定盲從心理學理論的，問題在於：有沒有適合該階段兒童學習的方式？若沒有，則盲從理論是無益的。

這套書的幾何教材，表現了另一種看法，即數學的看法：F.kleive 在二十世紀初發表的 Earlaugan Program 中指出，教學教育裡的中學幾何課程，還停留在十七世紀的教材（即學習歐氏幾何），不肯把較新的幾何內容納入課程，致使幾何是研究各種變換下不變性或不變量的精神，完全遺漏。自從 Earlaugan Program 發表後，六十年來未見動靜（與其間的兩次世界大戰當然有關），最近的中學數學課程的改革，才開始見到一些意圖實現的跡象。一九六〇年代日本中學的數學課程改革，明顯的帶有這種企圖，但顯然沒有這套書的成功。

一套中學數學教科書的編者，對教材的選取，當然不能完全依據數學的理論，但努力表達數學的真意與精神的態度，我以為是非常應該的。

最後談到教材的實用性：計算器械的引入當然是其中的一部分（由於國情的不同，我國人士不一定要認為實用）。這套書的許多例子都是有相當實用價值的，如航海圖與雷達，統計的材料，與連續圖案。這些都是在升學的中學畢業生就

業時可能用到的知識。

四、教材的組織與表現方式——上文已經談到這套書對抽象性與較形式化的教材，處理方式是漸近的，這對兒童的學習是大有助益的。另外可明顯看出的是，教材的螺旋式出現（參看2.教材內容部分），即某一教材出現時，不是第一次出現就完全出現完，而且分成幾個單元出現。

這點是很重要的，因為我國中學教師有一習慣，喜歡一竿到底地表現所有的教材，學生在還沒有消化前半部教材的情況下，所有教材就出現完結了，以後不再出現。這種情形當然造成學習上效果的不良。我國現行國中數學部份教材也採用螺旋式出現，但因教師的習慣而無法收教材螺旋式出現的優點。

我國中學教師對教材螺旋式出現的反對理由是，到教材第二次出現時，學生已忘了前面所學的部分，得重新教一遍。到底學生對前面教的部分懂了沒有呢？或是其他因素使學生容易忘記呢？這是值得探討的問題。因為教材的螺旋式出現，（從理論上說）應該只對學習有幫助的。

前文中也曾提到，這套書中有許多是操作型的教材。其實這些操作型的教材，到後來慢慢都加以收納整理成較形式化的結果。教材的這種處理方式，大概又是受心理學家布魯納的學習理論的影響。按照布氏的理論，這種處理方式有助於學習效果的提高。

布氏把學習方式分成三類：即透過具體物操作的學習（*Enactive Learning*，如學游泳）透過圖像在腦海中重現的學習（*Iconic Learning*，如看冰河的圖而知冰河），及借用抽象符號如語言、文字的學習（*Symbolic Learning*）。他認為任何的學習若能將以上的學習方式合成使用，則學習效果會顯著的提高，尤其年紀較小的學生，對抽象符號的掌握較差時，更是如此。

國中學生是12歲到15歲，剛好處於由具體操作期到形式操作期的過渡時期（皮亞傑的分階）。在這期間可能是布氏理論使用起來最有效的時期。這套教材不但在許多教材處理的螺旋上，而且在整套教材出現的螺旋上，也都採用了這種處理方式，是其成功的地方。

另外值得一提的是，這套書採用了學童感興趣的一些例子，以提高學童的學習興趣。這些例子有些是英國的遊戲，或學童熟悉的鄉土事物（在此不想花篇幅來描述）。這種精神與原則也是值得我們學習的。

這裡提出一點奇怪之處：傳統教材中的二元一次方程組，不但其實用性高（與日常生活有關的例子很多），可以引起學生的興趣，而且學生學習上不致有任何困難（數值的計算操作具多），而且從整個教材結構的配合上也不成問題（與坐標平面上的直線圖形等教材），但竟不在這套教材內出現，實在有點奇怪。

究有原由可能是下列的：與畢業後的會考有關，教學時數限制教材（但這兩點怎樣都說不太通，許多與畢業會考無關的教材都列入了，而且其時數的充裕不太成問題）；最後只能認為是處理上的困難。

這套教材對一元一次方程式，是採用簡單的流程圖來求解的，若要把二元一次方程式的求解，用流程圖則較難，而要採用傳統的解法，又得重開爐灶。所以對這個教材只好割愛，這正是編書者最困難的地方。但我認為這種割愛方式有待商榷。

五、總結——從這套教材的分析研究，我們可以看到下列的原則：

- 甲、教材的選取能合學童心智發展的程度，且具實用性，並能表達數學精神。
- 乙、教材的出現呈螺旋式的，而處理方式則由具體操作漸漸進入形式化的運算。
- 丙、把鄉土教材溶入教材中，以引起學習的興趣。
- 丁、顧及將來社會發展的需要（如計算機的引入）。

這些原則是相當好的。當然，由於國情的不同，對原則的解釋可能不一樣，但這些編數學教材的原則仍然成立。

在課程改革聲中，需要特別考慮到的是師資的問題，師資不加於訓練或調整，常無法瞭解課程改革的精神所在，而使課程改革流於形式化的紙上作業。