數學課程設計和數學教學的理論基礎（下）

林清山　國立臺灣師範大學

2.在數學課程裏，學生所要獲得的並不是許多零星的數學事實，而是那些可以使教材與教材之間，或事物與事物之間發生有意義之關聯的「結構」（structures）。和那些可以獲得這些數學知識及結構之「過程」（processes）。

如果上數學科的目的是在於學習許多零零星星的數學事實和公式，則因爲學生的學習速度永遠趕不上這知識暴漲時代之知識增加的速度，學生即使窮畢生之力也永遠學習不完它們。如要適當的趕上這時代知識增加之速度，則惟一辦法便是去把握住知識之間的關係性（relatedness）。此種關係性乃是布魯納所謂的「結構」把握住此項數學結構之後，複雜而變幻不定的數學現象就變得較爲簡單而且較可預料，也纔能夠使學生眞正感到心智上的滿足和愉快。同樣重要的一點是獲得了數學教材的結構後，因其具有概括性和類化性，乃可發生最大的學習遷移，有助於學生處理所面臨的無數類似的情境（Bruner, 1971）。因之，今日的數學課程中所採用的教材，不再是彼此不相關連的章節所構成，而是由一些公認爲重要的數學結構貫穿整個或大部分教材而成的，例如，集合、關係、數系、函數等，或處理〃群〃（group）之代數結構、處理〃網路〃（network）之次序結構，和處理連續性和接近性（continuity and proximity）的拓樸學結構等。這些數學結構就好比是一棵樹的樹幹和大樹枝可以把許多個別分散的樹葉貫穿在一起一樣，可將有關各部分的數學概念和事實貫穿在一起，而納入同一結構裏。

基於同樣的理由和因爲數學課程須能爲學生提供能在問題情境中明智的解決問題所須之數學概念原則，和技能起見，布魯納强調獲得「過程」技能的重要性。在「邁向教學理論」（Toward a Theory of Instruction）一書中，他（1966）說：「…課程不只反映知識（特定的學得能力）本身的性質，而且反映學習者以及獲得知識之過程的性質。……我們教一個科目，並不是希望學生成爲該科目的一個活圖書館，而是在於使學生能夠爲自已精確的思考，像歷史家一樣考慮事情，和參與獲得知識的過程。求知是一種過程，而不是成果」（P.72）。顯然的，布魯納認爲不可以只使學生把所有時間花在學習已知的數學事實和概念，而忽略去學習如何去尋找未知的數學事象的那些方法。譬如說，布魯納十分强調讓學生有機會去「發現」（discovery），乃是因爲他認爲發現的方法本身也須加以訓練。雖然，國民中學數學課程目標並不在於訓練數學家，但是我們也應該有機會訓練學生學習像數學家那

樣分析、比較、假設、驗證、和探索等。而使學生學會這些方法最好的辦法便是使學生有機會參與這些過程，因爲除了參與探索之外，沒有其他途徑可以改進探索的技巧(Bruner, 1966)。

3.不可以在教學剛剛開始時就把數學教材的最後形式呈現給學生。爲鼓勵學生多學習「直覺思考」(intuitive thinking)、跳步、捷徑、和策略(strategy)等發現方面的啓發性技巧(heuristics of discovery)起見，教師自已在數學教學過程中，應多使用「發現教學法」，並安排情境，讓學生去把教材的最後形式發現出來。

布魯納是提倡「發現教學法」的代表者。他所謂發現教學法，方式不止一種：包括使用蘇格拉底法(亦即，在與學生對話的過程中，協助學生發覺自已錯誤，從而使其自已領悟某種道理)、設計特別巧妙的計算問題使學生能找出某種規則、激發學生使用捷徑自已發現有趣的算法，甚至使學生形成有趣、自信、和興奮之態度等。布魯納承認有時發現教學法實施起來有困難，但是那是技術上的問題，而不是實質上的問題。至少發現教學法有下列兩個優點是值得重視的：第一、數學學習活動中常需要重新排次序、找出原來的形式、和加以簡化等各種活動，在這些活動裏，學生是主動學習者(在演講法裏，學生是被動的聽講者，經常比演講者先打瞌睡！)2發現的本身就是一種酬賞，尤其是了解或熟練所發現的數學概念時爲然。例如，即使學生發現一種微不足道的簡捷算法時，學生也十分高興(Bruner, 1971)。

例如，在一般註釋式(expository)教學裏，教師通常在教學一開始時，便把 $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$ 這一最後形式直接呈現給學生。然後，就開始說明這一式子怎樣來和舉例說明怎樣代公式。例如，說明 $(x+a)^2=(x+a)(x+a)=x^2+ax+ax+a^2=x^2+2ax+a^2$，接著又說明 $a=1$ 時 $(x+1)^2=x^2+2x+1$，和 $a=2$ 時 $(x+2)^2=x^2+4x+4$，……如此類推。相反的，在使用發現教學法的教室裏，教師一開始就讓兒童玩圖五所示的形式板，不把 $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$ 馬上呈現給學生。教師只在學生動手活動和思考過程中，以適當的問題刺激學生思考，如同前面描述圖五的實驗時所說的那樣，或在有必要時，纔以對解決問題有幫助的話，啓發或提示學生，使他們終於自已發現 $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$ 所隱含的數學概念，甚或自已把這個式子建造出來。(布魯納的意思是說學生自已在自已腦海裏發現了這一公式所代表的概念，而不是終於在課本裏找到了這一公式！)在這種教學環境裏，學生不但可能「發現什麼」，而且直接經驗到「學習如何發現」。

KirK(1966)在Mathematics Student Journal 中引用學生的話，描述一段發現教學的揷曲：

「我們班級有一天在做這個實驗：我們發現如果某數N能寫爲兩個質數P和Q之積，那麼N的因數之和便是 $(1+P)\times(1+Q)$。

例： $15=3\times5$，因數爲 1, 3, 5, 15.

因數之和是 24，而 $24=(1+3)\times(1+4)$」

我們可以想像這些學生在發現到這些關係時，其內心是多麼的愉快和滿足！

其實，假使學生已經學過三角形面積之求法以後，我們也可用發現教學法，讓學生自己去發現任何邊數的正多邊形面積之求法，而不必一定要馬上把求正多邊形面積之公式直接告訴學生。譬如說，畫任何多邊形時，也許學生自己可以發現或教師暗示：正多邊形均可內接在圓裏面，圓心到正多邊形的頂點之距離都相等，且等於半徑。此時，學生可能發現，如果把所有圓心到頂點的半徑都畫出來，使正多邊形分割爲幾個三角形，則(1)正多邊形面積爲這些三角形面積之和，(2)這些三角形均爲相等等腰三角形，故面積均相等，(3)量一個三角形的底和高，便能找出這些三角形任何一個的面積。(4)三角形之數目等於正多邊形之邊數。接著，學生可能會發現不管正三角形

、正方形、正五角形……，其組型（pattern）均一樣，終於可能自己發現：正多邊形的面積爲其任一邊長與圓心至一邊的距離之積的一半，乘以其邊數（Butler, et at. 1970, PP. 126—127）。

布魯納主張，在發現教學法裏，鼓勵學生運用策略、對照、捷徑、和直覺思考。直覺（intuition）是指不靠一個人的分析才能，而把握住問題之結構所含的意義之一種活動。布魯納曾觀察一個十歲的兒童用他撿來的蝸牛殼排成矩形的列陣。這兒童發現有某些數，不能排成正好爲矩形的列陣，不管怎麼排總是剩一個出來；但是如果把兩個這種列陣放在一起，便變成一個正好爲矩形的列陣。（例如 $\begin{smallmatrix}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\end{smallmatrix}$ 和 $\begin{smallmatrix}&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{smallmatrix}$ 合爲 $\begin{smallmatrix}\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{smallmatrix}$ ）。布魯納認爲這位兒童的活動具有直覺思考性質，可使他以後很快的了解質數（prime number）是什麼意思。這個兒童也可了解可逆性，亦即可以把這兩個集合放在一起，使不成爲質數；也可再把它們分開，又變爲質數。像這樣，布魯納主張教師應讓兒童用他們自然的和直覺的方式去思考；他們做得好時，且應鼓勵和誇獎；不但不應禁止他們直覺思考，而且應該協助他們去改進它。因此，他反對過早使用數學的專門語言，過早强調數學的形式，使兒童誤認數學與他們所知的全然不一樣，使他們看不出他們一向所做的（如上例排蝸牛殼）也是數學。更糟的是，不鼓勵憑直覺去思考，反而一定要强調正式的證明方法，終於使兒童失去興趣而認爲數學與他無緣（Bruner, 1971）。

以上布魯納的理論所强調的，正是我國數學教育所最缺乏而應該加强的。他的理論眞值得我國數學課程編製者加以研討採用。

Scott（1966）曾在 Trends in Elementary School Mathematics 一書中，列出有關數學課程的十個基本原則，它們是：

(1)各年級應特別强調數學的結構，對具有持久性質的主題和關係，尤應集中力量加以注意。

(2)如果能注意强調概念與概念之間的關係，則兒童也可以學習較爲抽象和複雜的概念。

(3)現有小學算術課程可作大幅度的濃縮，因爲兒童能在較我們通常所想像的爲早的年齡裏學習概念。

(4)如果我們能找出適當的語言來表達該一概念，則任何概念均可用心智上眞實的方式敎給任何年齡的兒童。

(5)歸納法和發現法收效大，可加强學習效果和有助於保持記憶。

(6)課程計劃的主要目的乃在於發展獨立思考和創造性思考歷程。

(7)人類的學習似係經過前操作、具體操作、和形式操作等時期。

(8)瞭解能力之生長，有賴於透過挑戰性的儀器和具體的材料進行概念探索，不能只限於操作抽象的符號。

(9)數學技能的敎學，應被視爲透過發現而使概念清晰和條理化的歷程，而不是一步一步記憶的歷程。

(10)應用個別概念或概念系統於實際情境，尤其是自然科學方面，對增强學習和保持記憶深具價值。

這些基本原則，可說是布魯納和皮亞傑之理論的摘要。

(三)蓋聶的理論　蓋聶（R. M. Gagné）是美國的心理學家，其理論採新行爲學派觀點，與皮亞傑及布魯納等認知心理學家的看法有很大的不同。其理論對數學課程有重大影響者有下列幾點：

1.整個數學課程或整個單元的數學敎材，應先確定所欲達成的目標爲何，接著以「工作分析」（task analysis）的方法，自上而下分析要完成這些目標所需之附屬工作（subordinate task）或子技能（subskills）是什麼。然後，以流程圖（flaw chart）的方式，將這些附屬工作，依最合理適當的順序（Sequence）排列，使成爲自下而上最容易產生垂直遷移（vertical transfer）的「學習階層」（hierarchy of learning）。

蓋聶也不相信學數學與成熟有密切的關係存

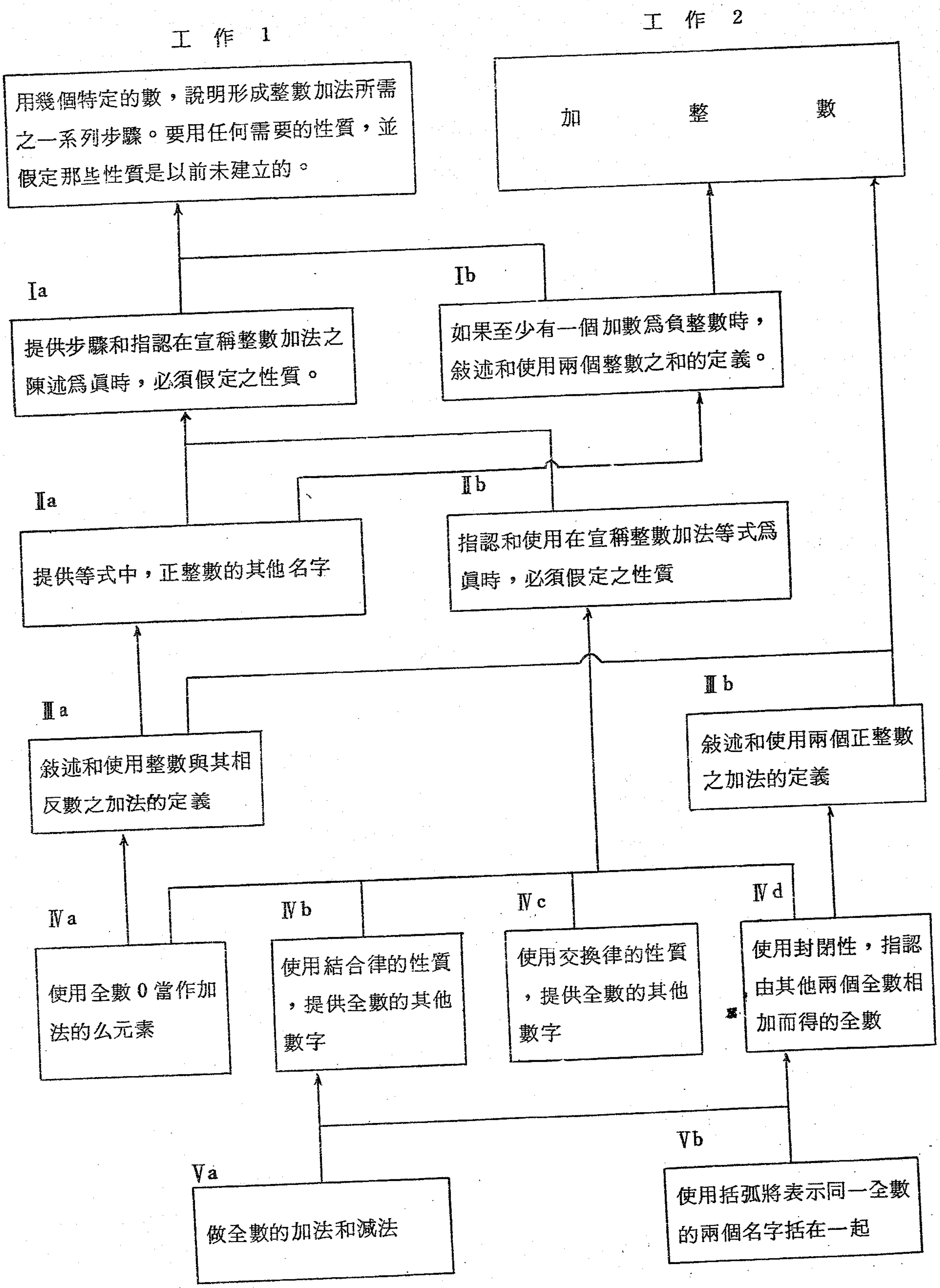
在。學生學習數學有困難並不是成熟程度不夠的緣故，而是因爲缺乏學習該項數學概念所須之基礎能力，亦即該概念之附屬工作或子技能不夠所致。他相信任何學習均有一種最合理的順序；假定前一學習爲後一學習之先決條件（prerequisite），則如果前一學習已經成功，便可以成功的學會後一學習。因此，在蓋聶的看法裏，所謂「學習預備度」是指學生是否具備學習某一終點工作所需之起點行爲或基礎能力而言。但是他所謂的「順序」並不是指一年級算術、二年級代數、三年級幾何的那種順序，而是指要能解決某項數學問題之前，須先了解解決這項問題所需之原理原則，要了解這些原理原則之前，必須先了解與這些原理原則有關的各種概念而言。圖六便是蓋聶所設計出來的學習階層的例子。在圖六的例子裏，學生所要學到的終點工作有兩個，被列在這一學習階層的最上端。列在終點工作之下的各項，均爲完成這兩個終點工作所需之附屬工作或子技能。它們顯然自上而下，被分析爲五個層次，分別以Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ和Ⅴ來表示。較低層次的子技能爲學習其上一層次的工作之先決條件。同一層次有兩個或兩個以上的子技能，分別以 a ，b ，c ，d 等表示學習時的先後次序。可見，學生要學習時，其順序是自左而右，自下而上，依次學習，最後便可以表現終點行爲，達成所預期的目標。

由此可見，在蓋聶的心目中，所謂數學課程的編製，最重要的任務是分析和研究整個課程的各部分如何左右聯絡，上下銜接，方能產生最合理的順序，和促進最大的學習遷移，並經濟有效的達成預期的數學課程目標。這不但要了解數學課程本身的結構，而且要知道學習者的學習歷程以及影響學習歷程的內外在條件。

2.數學科教師，在每一單元教學之前，應了解本單元的教學目標何在，將本單元最後希望學生獲得的能力（capability）用具體的「行爲目標」之方式表達出來。同時，他也須用前例（pre-test）來測定學生的起點行爲或基礎能力，以了解學生現在的能力約在學習階層的那一個位置。然後，教師纔從每位學生的起點行爲出發，一步一步引導學生學習每一樣附屬工作或子技能，終於使學生能表現期望中的終點行爲。因此，學生要在教師引導之下，有計劃的學習事先計劃好的教材，而不是自己無助的摸索和發現。教師的教學可能是個別化教學（individualized instruction），不一定全是同一步調的班級教學。

與布魯納提倡「發現學習」相反的，蓋聶提倡所謂的「引導學習」（guided learning）。其主要精神與編序教學的精神最相接近。在編序教學裏，學生按著事先仔細計劃好的步驟和順序，一步一步學習。教學的媒體可能是教學機，編序教材，或按一定步驟教學的教師。在未學習下一項工作和技能之前，現在正學習中的此項工作和技能必須學到十分熟練的程度。因此，學生受到很多的指導，學習的錯誤也減到最低限度。由於每一步均是學生可以了解的，學生最後也能了解教材所含的意義。這裏，必須說明的一點是：蓋聶提倡引導學習，並不是說全班每一位學生均以同一步調和單一途徑來進行學習。每一位學生可以在學習階層的不同位置起步，教師也可以在學習階層中插入其他階步，或改變學習階層中某些階步的次序。然而，因爲學習階層是預先經過良好計劃而設計成功的，雖然殊途可以同歸，這一事先計劃的學習階層還是最值得採用的（Shulman, 1970）。

由於數學科本身的結構較嚴密，且基礎技能或概念如果未能獲得便足以影響其後的學習，所以上述蓋聶的理論似乎特別值得數學課程編製者的重視。至於到底是蓋聶的「引導學習」比較好或布魯納的「發現學習」比較好呢？這就要視教學目標、教材的性質、學生的特性，甚至教師的擅長而定，無法一概而論。表二表示教學生解決問題時，給學生的指導份量，可有程度上的不同。解決問題所須用「原則」和解決的「方法」均告訴學生，是爲註釋式（expository）教學；原則與方法均不告訴學生，是爲純發現教學法。這兩



圖六　整數加法的學習階層（Gagné ， 1962）

原	則	解決方法
給	給	註釋式教學
給	不給	指導發現（演繹）
不給	給	指導發現（歸納）
不給	不給	“純”發現教學

表二　指導份量不同的教學方法（Wittrock, 1963）

個極端之間，還有兩種，均叫做「指導發現」（guided discovery）法。教師讓學生去發現，但是仍然給適當份量的指導。當然，這是教師的教學技巧的問題，應由教師來決定。

3. 學生在學校中所學的大部分事物是「心智技能」（intellectual skills），而不是「可語言化知識」（verbalizable knowledge）。數學課程的設計，應强調依計劃好的順序培養學生有關數學的心智技能，而不是使學生記誦那些因數學家之成就而累積下來的知識。換言之，應重視「過程」較甚於重視「成果」。

蓋聶（1968）在 Learning Hierarchies 一文中，改變過去的看法，也與布魯納一樣强調「過程」的重要性。他說他所主張的學習階層主要的是由心智技能所構成（有時他用 capabilities 一詞），而不是可語言化知識。以電腦用語來說，心智技能所描述的相當於電腦程式的 Subroutines，而可語言化知識則相當於可由電腦的 Memory 部分提取的資料。簡言之，心智技能係涉及一個人能做什麼，而可語言化知識，則涉及一個人知道什麼。蓋聶認爲數學事實上是一些操作數的技能所構成。例如，圖六裏使用數系的例子來說，學生要學習的並不是有關數系的「知識」，而是要學習形成「數的集合之間的關係」之一套特定「技能」。在這學習階層裏所描述的是心智技能之間的正向學習遷移關係，而不是描述學生如何獲得可語言化知識。蓋聶認爲在解決某一問題時，可語言化知識與心智技能均甚重要，但對課程編製者而言，將可語言化知識與心智技能加以區分，乃是必要的。表三右邊是蓋聶（1974）最近對學習的種類的分類，由這些分類可看出所謂心智技能是指的什麼。前面表一的雙

表三　蓋聶的學習類型分類及其行動動詞

行動動詞	分　類
recall	(1)語文知識（verbal information）
	(2)心智技能（intellectual skills）
discriminate	辨別（discrimination）
identify	具體概念（concrete concept）
classify	定義概念（defined concept）
apply	原理原則（rule）
generate	高層次原理原則（high-order rule）
originate	(3)認知策略（cognitive strategy）
choose	(4)態度（attitude）
manipulate	(5)動作技能（motor skills）

向細目表橫軸的「行爲」，如果以這種區分法來替代，數學課程目標也許可以表達得更淸楚些，數學教師的教學也許會更對準目標進行。

在講究計劃教學和重視績效責任的今天，蓋聶的理論對新課程的實際已發生很大的影響力。想來，他的理論必定有許多地方值得我們數學課程編製者的參考。

參考文獻

林淸山：科學教育的心理學基礎（上）。國立台灣師範大學，科學教育月刊，民國 65 年，創刊號，第 27 至 36 頁。

林淸山：科學教育的心理學基礎（下）。國立台灣師範大學，科學教育月刊，民國 65 年，第二期，第 15 至 20 頁。

國民中學課程標準。教育部中等教育司，民國 61 年。

Bruner, J.S. The Process of Education. New York: Vintage Books, 1960.

Bruner, J.S. Toward a Theory of Instruction. New York: W.W Norton, 1966.

Bruner, J.S. On learning mathematics. In McIntosh, J.A.(ed.) Perspectives on Secondary Mathematics Education. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1971.

Butler, C.H., Wren, F.L., & Banks, J.H. The Teaching of Secondary Mathematics. New York: McGraw-Hill, 1970.

De Cecco, J.P. The Psychology of Learning and Instruction: Educational Psychology. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1968.

Fehr, H.F. Sense and nonsense in a modern school mathematics program. The Arithmetic Teacher, 1966, 13, 83-91.

Feldhake, H.J. Student acceptance of the new mathematics program. The Arithmetic Teacher, 1966, 13, 14-19.

Friedlander, B.Z. A psychologist's second thoughts on concepts, curiosity, and discovery in teaching and learning. Harvard Educational Review, 1965, 35, 18-38.

Gagné, R.M., Mayer, J.R., Garstens, H.L., & Paradise, N.E. Factors in acquiring Knowledge of a mathematics task, Psychological Monographs, 1962, 76, No. 526.

Gagné, R.M. Learning hierarchy. Educational Psychologist, 1968, 6(1). 1, 3-6, 9.

Gagné, R.M. Essentials of Learning for Instruction. Illinois: Dryden Press, 1974.

Kirk, M. A theorem of factors, Mathematics Student Journal, 1966, 10, 5.

Minnick, J.H. Teaching Mathematics in the Secondary Schools. New York: Prentice-Hall, 1939.

Piaget, J., Inhelder, B., & Szeminska, A. The Child's Conception of Geometry. New York: Basic Books, 1960,

Piaget, J. Development and learning. The Journal of Research in Science Teaching, 1964, 2(3), 176-186.

Piaget, J. The Child's Conception of Number. New York: Norton, 1965.

Pulaski, M.A.S. Understanding Piaget. New York: Harper & Row, 1971.

Scott, L. Trends in Elementary School Mathematics. Chicago: Rand McNally, 1966.

Shulman, L.S. Psychological controversies in the teaching of science and mathematics. Science Teacher, 1968, 35 (6), 24-38.

Shulman, L.S. Psychology and mathematics education. In Begle, E.G. (ed.) Mathematics Education: The Sixty-ninth Yearbook of the National Society for the Study of Education. Chicago: The University of Chicago Press, 1970.

Wilson, J.W. Evaluation of learning in secondary school mathematics. In Bloom, E.S., Hastings, J.T., Madaus, G.F. (eds.) Hand book on Formative and Summative Evaluation of Student Learning. New York: McGraw-Hill, 1971.

Wittrock, M.C. Verbal stimuli in concept formation: Learning by discovery. Journal of Educational Psychology, 1963, 64, 183-190.

Wood, R. Objectives in the teaching of mathematics. Educational Research, 1968, 10, 83-98.