

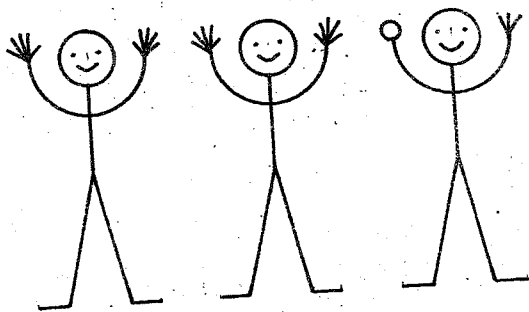
位值的認識

簡蒼調 省立臺中師範專科學校

我們由甲骨文裡發現我國在商朝時（約西元前十四世紀）已有十進位的記數，而且當時的十進位的記數已具「位值的觀念」。從數學發展史來看，可確定我國是最早使用十進位和具位值的記數。巴比倫的蘇美人（Sumer）雖在 B.D.

700 年引用了位值，但並非以 10 為進位。埃及雖用十進位，但不具位值的觀念。印度在西元前三百年有一組數字叫做“Brahmi”，還沒有「0」，也未引用定位原理。（註）

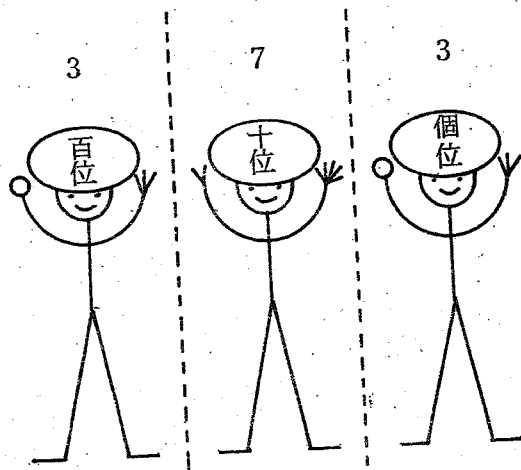
阿拉伯數字記法也就是現在用的記數法，它的一特色是為十進制，不過，這一點並不特別重要，因為如果引用不同的專用記號來代表“十”與“十一”，則我們可以使用十二進制。依此類推，當然可用其他的進位制。實質上，它的最重要特色乃是“它具位值性”，這是人類智慧的表現。也就是說同一數字，視其不同的位置，有其不同「值」的表現。中石器時代，數「數」的時候常需借助於多人的手指，當一個人的手指頭十個都用完後，須請另外一個人的手指頭伸出來，依此進行數「數」。如（圖一）所表的數為 23。



圖一

如此，欲數盡一群人衆，如全班或全校學生人數，需借助於許多人的手指頭，實為不便且繁難。若於教學這時候該讓學習者有時間思考怎麼辦了。

「位值」是計數中用上記憶的開始，第一個人伸指計算，第二個人來記憶。當第一人數到 10，手指恢復握拳原狀（手指緩慢收回），這時第二人伸出一個手指頭來代表之。依此進行，兩人可表現手示記數到“99”。這種情形第一人伸出的手指數為“個位數”，令他頭上帶着“個位帽”；第二人伸出的手指數乃為“十位數”，令他帶上“十位帽”，以顯示之（如圖二）。如



圖二

果再須算下去，便得再請一人稱為第三人；當第二人數到“10”，收回手指，這時第三人伸出一個手指頭來代表，其值已為十個 10，即為一百，如此三人最多可數到“999”。依此進行的方法稱為「位值」記數法，例如圖二表示“373”。

以上「位值」記數方法延至今天已成為我們的習慣記數法。它是先選取一個「數基 b 」，異於 0, 1 的正整數，然後 0, 1, 2, ………, $(b-1)$ 就稱為數字 (digits)。對任意一個整數 n 的記數方法可唯一決定如下：

$$n = b \cdot q_0 + r_0 \quad (0 \leq r_0 < b) \cdots \cdots (1)$$

若 $q_0 = 0$, 則 $n = r_0$

$$\text{若 } q_0 > 0, \text{ 則 } q_0 = b \cdot q_1 + r_1 \quad (0 \leq r_1 < b) \cdots \cdots (2)$$

這時候, 若 $q_1 = 0$, 則 $q_0 = r_1$; $n = b r_1 + r_0$

$$\text{若 } q_1 > 0, \text{ 則 } q_1 = b \cdot q_2 + r_2, \quad (0 \leq r_2 < b) \cdots \cdots (3)$$

這時候, 若 $q_2 = 0$, 則由(3)得 $q_1 = r_2$;

由(1)(2)得

$$n = b^2 \cdot r_2 + b \cdot r_1 + r_0$$

若 $q_i > 0$, 則我們可繼續推求, 最後必有某

一正整數 m , 使 $q_m = 0$, 且得

$$n = r_m \cdot b^m + r_{m-1} \cdot b^{m-1} + \cdots + r_2 \cdot b^2 + r_1 \cdot b + r_0, \quad (0 \leq r_i < b)$$

通常記數法中只用其係數“ r_i ”, 即

$$n = (\underbrace{r_m}_{m\text{次方位}} \underbrace{r_{m-1}}_{\text{}} \cdots \underbrace{r_2}_{\text{二次方位}} \underbrace{r_1}_{\text{一次方位}} \underbrace{r_0}_{\text{零次方位}}) b$$

數基(底)

今日慣用的記數法是 b 以“10”為底的「位

值」十進制記數法。例如

$$3402 = 3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 2$$

在電子計算語言裡, 是以“2”為底的「位值」

二進制記數法, 例如

$$1011 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1$$

這種人類智慧表現的「位值記數法」在成人看來是一目了然, 但是若對於國中國小學童而言則為不易。因為我們時常發現許多學童將“二十三”寫作“32”; 既使寫對了“23”, 尚不能確定他真正認識了「位值」的意義與表現, 這不是臆測而是事實。數學教師如能仿照上述(手指操作表現)方法教學, 我們認為要比現行的「堆方瓦」或數「算珠」的教學來得新鮮生動且簡便有效。下面所附上的是本人於民國六十五年十一月十日在魚池國小專以「認識位值」而舉辦的南投縣設計教學觀摩研習會的設計表:(僅列出主要部分)

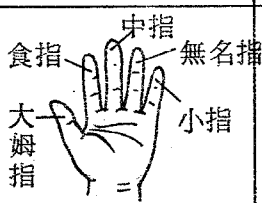
一、教學目標

- (1) 能確實熟悉 0, 1, 2, ……… 100 之記數法。
- (2) 能確實認識「位值」的意義與表現。
- (3) 能區別清楚「基數」與「序數」。

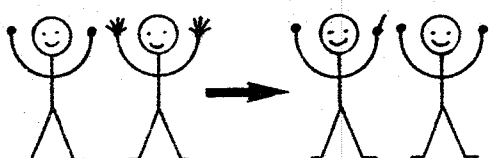
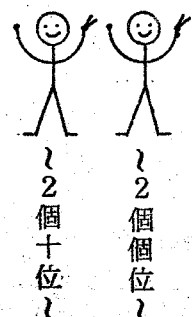
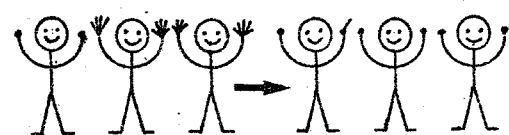
二、教學前準備

- (1) 教師發給每位學生四小張白紙。每小張右上編號①②③④並寫上學號姓名。
- (2) 每一位學生帶有空信封一個(寫上號碼, 姓名)。

三、教學活動

配合教學目標(號碼)	具體目標	活動過程	評量內容與標準	預定使用時間
(1)	①能認識一個人有兩隻手, 一隻手五指, 兩手共 10 指	①△: 師生全體均伸舉右手手指, 教師介紹五根手指之名稱。 △: 教師從右手大拇指開始伸出, 並令學生讀出 1, 2, 3, 4, 5 接着左手數出 6, 7, 8, 9, 10 (重複一次) 	①學生能模仿(左邊)動作重新數一遍	十分鐘

配合教學目標(號碼)	具體目標	活動過程	評量內容與標準	個人用時間
(3) (1)	②能區別「基數」與「序數」	②△₁ 伸出右手三個手指同時讀出“3”(個手指) △₂ 伸出右手中指，同時讀出“第三”(個手指) △₃ 作第7個與7個之教學 △₄ 師生全體使用兩手手指伸展與收回反復來計算(數數)從1至100。	②令學生取出第①號白紙，畫上五個圈圈成一列，然後用筆塗上第三個圈圈。 再畫上另一列五個圈圈，用筆塗上三個圈圈。 (作完放入信封內)	十分鐘
(1) (2)	③能使用手指記數一位數並知道“0”之意義	③△₁ 請一位學生站在講台上面向其他同學，伸舉兩手作握拳狀 師生一齊讀出1, 2, 3 9, 10 這位同學相應依次伸展手指數 △₂ 然後，師生由9, 8, 7, 6, 5..... 3, 2, 1 依次讀出，這位同學相應依次收回手指呈狀。 △₃ 教師令這位同學再收回最後一根手指，這時間這位學生手上還有沒有伸展的手指？藉此說明“0”的用法。	③取出第②號白紙寫下： △₁ 一個人用手指 (每一根僅能伸一次) 計算最多算到多少？ △₂ 最少算到多少？ (寫完放入信封內)	十五分鐘
(2) (1)	④能明白從「一位數」進入「二位數」的記數方法	④△₁ 讓學生考慮，由(台上這位)一個人能不能伸出比10還多1根的手指來？即，要表示計算十一的手指怎麼辦？ △₂ (這時已有兩位學生)，師生慢慢(讀出)數1至20，這兩位學生自右邊起相應伸展其手指 △₃ 讓學生考慮，若要用這種方法，使用人的手指來計算並表示全班人數或全校人數需請多少人上台幫忙？ △₄ 需請很多人，很不方便又麻煩，而我們人類是有智慧的，尤其是我們中國人，有辦法來解決這種困難。	④△₁ 學生能說出「再請」一位學生上台幫忙。 △₂ 能回答「很多」或太多或很麻煩	十分鐘

配合教學目標(號碼)	具體目標	活動過程	評量內容與標準	預定使用時間																		
(2)	⑤能分辨二位數中左邊數字所代表的位值	⑤我們的辦法是： △：請台上兩人，先從右邊一人伸指計算，左邊一人與其餘師生來記憶。 當第一人算到“十”時，手指恢復原狀（握拳），這時左邊第二人伸出一個手指來代表之。  (教師在黑板上記錄) <table><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>十位</td><td>個位</td></tr></table> △：仿此繼續教學 11，12，13 至 20。 △：當這兩位台上學生表演到形狀時，教師在黑板上記錄 說明：（如右圖） $22 = 2 \times 10 + 2 \times 1$ <table><tr><td>2 個十位</td><td>2 個個位</td></tr><tr><td>2 個 10</td><td>2 個 1</td></tr><tr><td>2 × 10</td><td>2 × 1</td></tr></table>	1	0	十位	個位	2 個十位	2 個個位	2 個 10	2 個 1	2 × 10	2 × 1	⑤△：能（回答）說出左邊一人所伸出的一指代表（等於）右邊一人的 10 個手指 取出第③號白紙寫答 △：就兩數 23 和 32 中 <table><tr><td>23</td><td>32</td></tr><tr><td>↓</td><td>↓</td></tr><tr><td>這個並代做幾根手指？</td><td>這個並代做幾根手指？</td></tr><tr><td>並且叫做什麼？</td><td>並且叫做什麼？</td></tr></table> （作完放入信封內）	23	32	↓	↓	這個並代做幾根手指？	這個並代做幾根手指？	並且叫做什麼？	並且叫做什麼？	十五分鐘
1	0																					
十位	個位																					
2 個十位	2 個個位																					
2 個 10	2 個 1																					
2 × 10	2 × 1																					
23	32																					
↓	↓																					
這個並代做幾根手指？	這個並代做幾根手指？																					
並且叫做什麼？	並且叫做什麼？																					
(2)	⑥操作第一個三位數及其記數法	⑥△：當台上兩位學生表演（計算）至 99 時，讓學生考慮要數 100，需要多少位同學在台上來表演？ △：待學生作完，再令三位同學表演一次 100 的記數方法 <table><tr><td></td><td></td><td>百位</td><td>十位</td><td>個位</td></tr><tr><td>9</td><td>9</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr></table> △：教師收回學生信封批閱記錄，作為學習效果之評量參考			百位	十位	個位	9	9	1	0	0	⑥△：取出第④號白紙寫出並畫圖（3 人操作）表示 100。 （教師可在黑板上畫簡單一個人像讓學生模仿） （作完放入信封）	十五分鐘								
		百位	十位	個位																		
9	9	1	0	0																		

〔註〕見 Van der waerden 所著“Science Awakening” P.P. 51 ~ 61。