

德國初中數學教材研究

(德國中學三、四、五年級)

李恭晴 國立臺灣師範大學

一、引言

本研究之主要目的在探討德國中學三、四、五年級數學教材之內容、精神、編排順序、編排方式等，以做為我國國中數學教材改進之參考。

德國各邦教育自主，各校採用之教材版本也不一致，唯各版本之內容，精神大致相差不多，為了便於深入之研究，本研究報告主要是根據 Schwann 出版社出版之“Mathematikwerk für Gymnasien”這一套書，該書於1964年出版，1975年十一版。

Mathematikwerk für Gymnasien 這一套書是供一般中學(Gymnasien)採用的教科書，德國一般中學學生以升學為主，與我國國中升學就業並重之情形不同，因此教材之性質也不盡相同，這是必須注意的一點。

另一點值得注意的是德國一般中學(Gymnasien)修業年限是九年，根據他們的學制，小學只有到四年級(六至十歲)，然後是九年一貫中學(十至十九歲)，雖然德國中學三、四、五年的分別相當於我國的國中一、二、三年級(以年齡及總共入學時間而論)，但是由於其九年一貫，因此教材結構與我國國中教材結構也有所不同。

二、教材內容

Mathematikwerk für Gymnasien 這套書第三冊主要是講述數的概念，第四冊講述代數，包

括集合，數的代數結構，方程式等，第五冊是幾何部份，各冊內容劃分得較清楚。

第三冊共分五章，依次為：有限集合中之計算，小數，百分率及其應用，有理數，計算尺，第一章與第五章較為獨立，其他三章有其一貫性，各章之內容如下：

第一章 有限集合中之計算

§ 1 旋轉群與有限群

由旋轉之意義及旋轉之合成導出旋轉群，例如旋轉 90° ， 180° ， 270° ， 360° 構成一個群，它有四個元素。次由旋轉之運算(合成)導出餘數之計算，利用“除九”之餘數以檢驗加法或乘法計算是否有錯誤，並介紹經由旋轉導出之裝璜花紋。

第二章 小數

本章先提出分數與小數之關係及其互換，再述及近似值的意義與其計算，最後以分數之四則運算推出小數之四則運算，全章共分八節。

§ 2 “十分數”與小數

分母為十之乘幕的分數稱為“十分數”，由例子說明並非每一個分數都可化為十分數，並說明十分數化為小數之方法，最後以例子說明小數有“有限小數”與“無限小數”(包括循環與不循環)，目的在讓學生知道有這種小數即可。

§ 3 分數與小數

本節進一步說明十分數化為小數必為有限小數，非十分數化為小數必為循環小數(皆以

實例說明)，最後說明循環小數化為分數之

法則：

$$\begin{aligned} \text{由 } \frac{1}{9} &= 0.\overline{1}, \frac{2}{9} = 0.\overline{2}, \dots, \frac{8}{9} = 0.\overline{8} \\ \frac{1}{99} &= 0.\overline{01}, \frac{2}{99} = 0.\overline{02}, \dots, \frac{17}{99} = 0.\overline{17} \\ \dots \frac{98}{99} &= 0.\overline{98} \dots \end{aligned}$$

說明循環小數化為分數之法則

§ 4 小數之近似值

未明白提及「四捨五入」法這個名詞，但顯然全部採用四捨五入法（沒有去尾法，進一法，標準法等）。在這一節中特別著重誤差與誤差之表示法，有效數字只有在提到取近似值時才提及，例如 3874253 取近似值為 3874000，其有效數字為四位，本節中並以區間說明循環小數所在之範圍。

§ 5 近似值之計算

以實例說明近似值之加、減、乘以及其和、差、積之最大可能誤差。

§ 6 小數之加減

由分數之加減導出小數之加減，並注意及近似小數之和，差的最大可能誤差。

§ 7 小數之乘法

與加減法同

§ 8 小數之除法

小數 $\div 10 \Rightarrow$ 有限小數相除（化為整數相除）， $\Rightarrow$ 無限小數相除 $\Rightarrow$ 最大可能誤差。

§ 9 分數與小數之複習

本節全部為習題

第三章 百分率及其應用

§ 10 相對比較與百分率之意義

簡單介紹百分率之意義，圖示百分比並介紹 %。

§ 11 百分率之計算

用實例計算折扣率。提出原價，百分率，百分值之關係公式，實際計算時應注意之點。

§ 12 百分率之應用

用於計算利息（年利、複利），相對誤差，打折，實得，虛得等之計算實例。

第四章 有理數

本章主要在說明有理數之次序與計算性質（

主要在負數之引入及其性質），並不涉及其代數結構。

§ 13 有理數所成之序集

以有向線段之左右方向說明有理數之正負，以有向線段之長代表所對應之有理數的絕對值（負分數在此出現）。

定義 $a < b$ 為：若有一 $c > 0$ 使得 $a + c =$

b ，則 $a < b$ 。並簡單介紹平面坐標。

§ 14 有理數之計算

以平行有向線段之加減說明有理數之加減，指出有理數對於加法具有交換群之諸性質，說明有理數相乘，相除，其積與商之正負的決定規則。

第五章 計算尺

§ 15 乘法計算尺之製作原理

§ 16 利用計算尺做計算

主要講解加與乘之計算，並介紹內插法。

第四冊：

本冊之標題為“代數 I”，主要在講述集合，邏輯推理證明方法，有理數體之代數結構，以及簡易方程式，不等式等，共分八章。

第一章 集合教材之複習與加強

§ 1 集合之概念

說明集合之意義，每一事物必須能分辨出是否屬於此集合，每一元素在集合記號中只能出現一次，並引入空集合，本節教材在第一、二冊中已提到過，純為複習性質。

§ 2 兩集合間之關係

以例子說明 $A = B$ ， $A \subset B$ ， $A \supset B$ ，並附文氏圖解說明。

§ 3 集合之運算

先舉例再依次說明 $A \cup B$ ， $A \cap B$ ， $A \setminus B$ ， $A \times B$ ，序對， $A \times B \times C$ ，三數組等之意義，並以文氏圖解說明。

第二章 等式與不等式

§ 4 語句與開放語句

以例子說明基本上可辨別正誤之句子稱為語句，語句必有真假值，疑問句與命令句皆非

語句。

等式與不等式可視為語句。

“ x 是6的因素”非語句，但具有語句之形式，稱為開放語句。含未知數之等式與不等式皆可視為開放語句。開放語句之基集與解集，兩變數之開放語句。

全體語句與存在語句：①對於所有的 x ，

$G(x)$ 成立。

②存在一個 x ，使得

$G(x)$ 成立。

§ 5 語句與開放語句之組合

“且”與“或”， $A \wedge B$ ， $A \vee B$ ，並以例子說明其真假值。

指出 $\forall$ 與 $\exists$ 之關係： $L(A \cup B) = L(A) \cup L(B)$ ，其中 $L(A)$ 代表 A 之解集。 $a \leq b$ 表示“ $a < b \vee a = b$ ”

§ 6 “ $\Rightarrow$ ”觀念與等價觀念

由例子說明 $A \Rightarrow B$ 、 $A \iff B$ 之意義，再整理成定義。

$L(A) \subseteq L(B)$ 則 $A \Rightarrow B$

第三章 有理數體

本章主要在討論有理數體之代數結構，因此有理數以及其四則運算，大小次序都重新加以定義。

§ 7 數與有向線段（向量）之運算結構

利用數和向量為例子，說明代數結構之意義（並下定義）。

以有向線段表示數，有向線段組稱為向量。列舉平面向量具有群之各種性質，再以這些性質定義群。

（正的）分數對於加法運算不構成一群，只是半群。

引入反運算“ $-$ ”與“ $\div$ ”。

§ 8 有理數集合

由正有理數與正向向量之 isomorphic，導出負有理數。

定義 $a < b$ 時， $a - b = (\overline{b - a})$

$(a, b > 0)$ ， $a - a = 0$ 。

定義絕對值

有理數之等價組（egivalent class）（相等之分數屬於同一組）。

平面坐標系（包括負坐標，即有四象限全部）

§ 9 有理數之加減

主要在說明加、減之代數性質

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$a + \overline{a} = \overline{a} + a = 0$$

$$a + \overline{b} = a - b$$

$$\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}$$

$$a - b = \overline{b - a}$$

結合律等

§ 10 有理數之乘除

分配律之意義，並說明有理數對乘法具有封閉性與交換性，由分配性導出與負數或0相乘的意義： $a \cdot 0 = 0$ ， $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

列舉 $R \setminus \{0\}$ 對於乘法合於群之各條件

定義有理數（正或負數）相除之定義：

$$a \div b = X \iff X \cdot b = a$$

並列舉負數相除之正負號之取法：

$$(-a) \div b = -(a \div b) \text{ 等}$$

§ 11 有理數構成之有序體

先以“餘數”說明體與環之意義，並列舉算術的基本性質（封閉性，結合律，單位元素，反元素，交換律，分配律）

定義有理數之大小： $a > b \iff a - b > 0$

證明大小關係具有遞移性，有理數具有密集性， $a < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$ 。

說明加法公理與乘法公理（ $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ ）

有理數體具有大小關係，且合於加法公理，乘法公理，因此為有序體。

第四章 證明

§ 12 公設，定理，證明

先以例子“ $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$ ”說明證明之意義，並說明公設與定理之區別。

§ 13 群之公設與群之基本定理

列舉群之公設，以證明消去律成立做證明的例子。

並列舉

$$\begin{cases} e^I = e & a \square e = a \\ (a^I)^I = a \\ (a+b) + (c+d) \\ = a + [b + (c+d)] \\ (a \square b)^I = a^I \square b^I \end{cases}$$

等之證明，做為證明之例子，使學生了解證明之意義。

§ 14 群之反運算

$$\text{由 } a+b=c \Leftrightarrow a=c-b, a \cdot b=c \Leftrightarrow$$

$$a=c:b \text{ 導出}$$

$$X \square b = a \Leftrightarrow X = a \square b^{-1},$$

$$b \square X = a \Leftrightarrow X = a \square b^I$$

即 X 有解，其解具有 $A \square b^{-1}$ 之形式，定義

$$a \times b = a \square b^I \text{ 稱為反運算}$$

第五章 多項式

§ 15 多項式之定義，全等（等價）

說明多項式之意義及其性質： $T_1 + T_2$ ， $T_1 - T_2$ ， $T_1 \cdot T_2$ ， $T_1(T_2)$ 都是多項式
交換律，結合律，分配律皆成立。

§ 16 多項式之改寫（變形）

$$\text{例 } T_1(a) = a+a, \quad T_2(b) = b+b+b,$$

$$T_3(a, b) = a+b+b+a+b,$$

$$T_4(x, y) = x+y-x-y+x-y$$

$$\text{可分別寫為 } T_1(a) = 2a, \quad T_2(b) = 3b,$$

$$T_3(a, b) = 2a + 3b,$$

$$T_4(x, y) = x - y$$

乘幕之意義 $T(a) = a \cdot a \cdot a$ 改寫為

$$T(a) = a^3$$

$$\text{乘幕之相乘： } a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

$$\text{乘幕之乘幕： } (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

（由例子說明）

$$\text{多項式相乘： } a(b+c) = ab+ac,$$

$$(4p+3q)(2p-5q) =$$

$$8p^2 - 14pq - 15q^2$$

（一步步計算而得）

$$\text{和之因素分解： } x^2y + xy^2 = xy(x+y)$$

$$\text{乘幕之和： } 3b^4 + 5b^4 = 8b^4,$$

$$a^3 + a^3 = a^3(1+a^2) \text{ 等}$$

$$\text{二項式定理： } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

（用圖形證明）

第六章 等式（方程式）與不等式之解法

§ 17 等式與不等式之同義變形

馬上可看出解答之開放語句： $X=2, X<3$

$X>5$ 等 “ $X=3 \vee X=7$ ” “ $X>4 \wedge X<7$ ”

同義變形：

$$X+3=8$$

$$X+5>7$$

$$\Leftrightarrow X+3+(-3)=8+(-3) \Leftrightarrow X+5+(-5)>7+(-5)$$

$$\Leftrightarrow X=5$$

$$\Leftrightarrow X>2$$

利用數之變形：加、減、乘、除同一數

利用整式之變形：加、減、乘、除同一式（乘、除時可能有增減根）整式之數目代入。

§ 18 簡單二次等式（方程式）與不等式

說明二次式之意義（舉例說明）

利用因式分解解二次方程式與二次不等式應

$$\text{用 } ab=0 \Leftrightarrow a=0 \vee b=0$$

$$ab>0 \Leftrightarrow (a>0 \wedge b>0) \vee (a<0 \wedge b<0)$$

$$ab<0 \Leftrightarrow (a>0 \wedge b<0) \vee (a<0 \wedge b>0)$$

主要在說明解之意義，求解之練習在習題中出現。

第七章 除法

§ 19 分式

用例子說明分式之定義域，同義分式（定義域可能不同）。

§ 20 分式之計算

$$\text{乘幕相除： } \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\text{分式乘除： } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

分式加減：同分母時，異分母時（通分）

整式除以整式（能除盡者為限）

§ 21 分式方程式與簡單分式不等式

由例子導出解分式方程式之步驟，解

$$\frac{X+3}{2} = 4, \quad \frac{X+1}{2} \geq \frac{X+2}{3}, \quad \frac{2}{X+1} > 1, \quad \frac{3}{X-1} \leq 1$$

第八章 等式與不等式，應用問題

§ 22 等式與不等式

依次舉例說明一次方程式，一次分式方程式，一次不等式之解法。

§ 23 應用問題

舉八個應用問題為例題以解之，並歸納成解應用問題之法則：

1. 多讀幾遍題目，直至完全了解其意思為止
2. 所要求的是什麼？（自問）
3. 與所要求的數有關的是什麼，列出一式子
4. 若尚不能解，則再自問那些條件還沒用到？

5. 驗算

第五冊 幾何 I

本冊共分七章，依次為幾何基本觀念之複習與加深，平移，旋轉與點鏡射，軸鏡射，全等映射之合成（運算），全等定理之應用，面積與斜面積。全冊主要在介紹各種幾何圖形，證明問題非常少。各章節之內容如下：

第一章 基本概念之複習與加深

§ 1 基本觀念之直觀導入

本節完全是複習以前學習過之幾何概念，如兩點決定一直線，兩直線決定一點，平行線，歪斜線，線段，射線，角，半平面，有向角等之意義，並說明幾何圖形為點之集合。

§ 2 幾何之基本概念及公設

本節進一步說明點與直線之意義，謂點與直線皆不可描述，為無定義名詞（以象棋中之馬說明點與直線之意義）。

列出幾何公設十四個，並個別加以說明，另有平行，線段，射線，同側，半平面等五個定義。

§ 3 線段與角之度量

在線段長度之度量中提出五個公設（射線 $\overrightarrow{SP}$ 上有一點 C 使得 $SC=AB$ ，反身性，對稱性，遞移性，加法公理）以及長短之定義，加法之定義。

在角之度量中提出六個公設（平面上有兩個

旋轉方向，其他五個與線段同）並提出角度加法，平角，角之大小等定義。

§ 4 關於角與圓之定理（複習）

補角，對頂角，直角，銳角，鈍角，大於 180° 角等之定義。

圓之定義，割線，切線之定義。

兩圓之五種可能相關位置。

提出中垂線到兩端等距，過三點恰有一圓等二定理（但沒證明）

第二章 平移

§ 5 平移之公設

由平移定義有向線段再定義向量。

說明平移之特性：一點 $\rightarrow$ 一點；線段 $\rightarrow$ 線段（平行且等長）；直線 $\rightarrow$ 直線（平行）角 $\rightarrow$ 角（大小一樣）。

平移之公設（兩有序點決定一平移，一平移將 P 移至一定點 P' ，線段保長，保角，無定點，平行性質）。

§ 6 平移之定理

平移將直線映成直線，每一平移中至少有一直線映成本身。

同位角之定義及定理（平行線同位角相等，反之必平行）。

平行線之作圖（利用上定理）。

平移之作圖。

§ 7 簡單圖形與平行

複習對頂角全等，同位角全等（平行線，上節定理），內錯角全等，再提到三角形內角和 $= 180^\circ$ ，外角 $=$ 兩內對角之和，平行線截平行線段等長，平行四邊形之定義，平行四邊形對角線互相平分（沒證明）

第三章 旋轉與點鏡射

§ 8 旋轉及其特性

複習旋轉之意義，並列舉其特性，再列出公設（6個）及定理（旋轉特性）。

弦與圓心角之意義及大小關係。

用圓規度量兩角是否相等。

旋轉之作圖。

§ 9 點鏡射

點鏡射可視為旋轉 180° ，點鏡射中提出 20 個公設與定理。

空間之旋轉與點鏡射（以圖形說明其概念而已）。

§ 10 點對稱圖形

點對稱之定義，點對稱四邊形與多邊形，特別提到平行四邊形的定理（點對稱四邊形必為平行四邊形，平行四邊形為點對稱，平行四邊形一雙對邊相等且平行，對角全等，對角線互相平分，兩雙對邊相等，等）。

第四章 軸鏡射

§ 11 軸鏡射之基本特性

先以直觀提出軸鏡射的一些性質，再將其依次列為公設及定理，本節共有公設六（①對於每一直線，有一軸鏡射以此直線為軸，②每一點 p 恰有一點 P' 對應，③線段一等長線段，④角一同等大小之角，⑤軸上每一點皆為定點，⑥ P, P' 在軸之異側）並有定理十八個。

§ 12 基本作圖

中垂線，過直線外一點作垂線，平行線，平分角線，軸鏡射之像點，等之作圖，只有作法而無證明。

§ 13 圖形之軸對稱

舉例說明軸對稱，對稱軸， n 階軸對稱及兩圖形之軸對稱的意義。

說明直線與圓都是 ∞ 階軸對稱，線段為二階，不共圓心之大小二圓構成之圖形為一階軸對稱，兩直線，一角等都是軸對稱（以上皆為定理）。

一圖形若有數個對稱軸，則這些對稱軸必共點。

一圖形若有 n 個對稱軸，則其交角 $= \frac{180^\circ}{n}$ （先由 $n=2, 3$ 兩定點再歸納成此定理）。

§ 14 等腰與等邊三角形為對稱圖形

說明三角形高，中線，角平分線，等邊三角形，等腰三角形之意義（及頂角，底角）。等腰三角形的特性：①必為軸對稱三角形，

反之軸對稱三角形必等腰。

②底之中線為高及角平分線。

③一三角形有兩角全等，則為等腰。

等邊三角形的特性：等邊三角形為三階軸對稱，由此導出等邊三角形之其他特性：①三內角相等且皆為 60° ②每一中線為高及角平分線 ③外接圓之圓心為對稱軸之交點。

§ 15 軸對稱四邊形

一對稱軸之對稱四邊形：①垂足對稱——梯形（等腰）

②對角線對稱——菱形

二階軸對稱四邊形：①垂足對稱——矩形

②對角線對稱——菱形

不可能有三階軸對稱之四邊形

四階軸對稱四邊形：正方形

§ 16 與圓有關之角與直線

割線，切線之意義 $\Rightarrow$ 切線與過切點之半徑垂直（定理，有證明），與圓心之距離為 r 。

圓心角，圓周角，弧之定義 $\Rightarrow$ 圓周角為圓心角之半，等弧對等圓周角。

弦切角之意義 $\Rightarrow$ 弦切角為圓心角之半，等於圓周角。

Thales 定理：直徑所對之圓周角為直角，逆定理。

利用 Thales 定理作圖：過圓外一點作切線 $\Rightarrow$

定理：有二切線，且等長。

內接四邊形與外切四邊形：

內接四邊形的意義 $\Rightarrow$ ①對角互補定理

②四邊之中垂線共點

外切四邊形的意義 $\Rightarrow$ ①兩組對邊之和相等

②四角之平分線共點

（皆附證明，並有彩色圖加以說明）

第五章 全等之合成 (Verknüpfung)

§ 17 平移，旋轉與鏡射之合成

基本性質— A_1, A_2 為一①映射，②保長，③保角，且④合於結合律

平移之合成— V_1, V_2 為一平移，合於交換群

之各條件。

旋轉之合成— $D_1 \circ D_2$ 爲一旋轉，合於交換群之各條件。

不同中心之旋轉的合成—說明合成之後旋轉角度之大小，及旋轉中心之取法 ($\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$)

鏡射之合成：—
①兩鏡射之軸平行 $\Rightarrow$ 合成爲一平移 (作圖說明)
②兩鏡射之軸不平行 $\Rightarrow$ 合成爲一旋轉 (作圖說明)

無封閉性，單位元素，結合律，交換律等。

§ 18 平面上之全等映射群

全等形之定義—經任意多次鏡射而產生之圖

形 $\begin{cases} \text{偶數次—同義全等} \\ \text{奇數次—反義全等} \end{cases}$

長度相等之線段全等，角度相同之角全等。

定理：若 A, B 爲全等映射 K 之二定點，則 $\overleftrightarrow{AB}$ 爲定線。

若 A, B, C 三點不共線，且爲 K 之定點，則 $K = \text{identity}$ 映射。

有兩定點之全等映射，非鏡射即爲映射。

兩全等圖形若交於兩對應點，則必爲鏡射。

兩全等圖形能用不多於三次鏡射而成。

平面上之全等映射構成一群 (但非交換群)。

§ 19 特別全等映射

移動 (同義全等映射) 之意義—平移與旋轉之合成。

每一移動不是平移即爲旋轉 ($B = V \cup D$)，它構成一類 (非交換群)。

反義全等映射之意義 (反置) — 經奇數個鏡射而成。

每一反置不是鏡射即爲“平移與鏡射之合成” ($U = S \cup G$)。

簡單圖形之自蓋映射。

平面之拼砌。

§ 20 全等定理

先說明全等爲等價關係 (反身性、對稱性、遞移性皆符合)。

三角形作圖：SSS, SAS, SSA, ASA

三角形全等定理：SSS, SAS, SSA, ASA

第六章 全等定理之應用

§ 21 應用全等定理證明

重複“證明”之意義

證明：等腰三角形定理，圓周角，圓心角之定理，樞紐定理，三角形之內心外心等以及弦長，切線長之問題 (很多以習題形式出現)。

§ 22 三角形之作圖

說明作圖之一般規則，並舉六例說明

§ 23 應用全等定理處理四邊形

分別定義凸四邊形，梯形，平行四邊形，菱形，矩形，正方形及箏形，再以習題形式證明其各種特性。

第七章 面積與傾斜

§ 24 平面平面之相等與面積

面爲點集，面積爲一量數及量數單位。

全等圖形之面積相等 (公設)，邊長爲一公分之正方形面積爲一平方公分 (公設)。

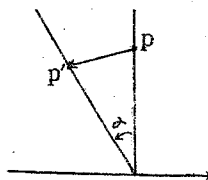
一圖形分爲兩子圖形，其面積必爲兩子圖形面積之和 (公設)

定理：矩形之面積 = 底 $\times$ 高。

依次得，平行四邊形，三角形，梯形等之面積公式，並提及邊爲線段之區域的面積求法。

§ 25 傾斜

傾斜之意義，特性 (傾斜爲一種點一點之映射)



多邊形傾斜後其面積不變

§ 26 面之變形 (面積保持不變)

先列出前述平行四邊形，三角形等面積之條件，再由此做面之變形 (底增加幾倍，高減

少幾倍等)。

平行四邊形對角線上任一點做邊之平行線，則不包含此對角線之兩個小平行四邊形等面積(定理)。

三、內容分析

1. 除了十進位記數法之外，在第一冊中還提到二進位十二進位記數法，我國國小及國中教材皆無二進位或其他進位記數法。
2. 因數、最大公因數等在一年級(約當我國國小五年級)講到。
3. 集合、關係、群、平移等在二年級時講授，我國現行國中數學教材並沒有群的理論。
4. 除了講授群、環、體等代數結構外，並討論到有序體。
5. 介紹簡單之同餘概念，並由此導出利用除九之餘數檢驗較大數目之乘積是否正確，我國國中教材無此部份。
6. 小數與分數互換之說明相當詳細，特別是循環小數與分數互換，解釋得不厭其詳。
7. 近似值部份只講授四捨五入法，而無進一法、去尾法、標準法等，有效數字以實際近似值加以說明。
8. 對於利息與打折等日常生活有關之問題，舉例說明得很詳細。
9. 三角形之全等定理以全等之合成加以說明。
10. 幾何證明問題較少。
11. 關於數系之討論，一方面以直觀為主加以說明，再歸納成結論，使學生了解數之基本性質與運算，另一方面以演繹方法，有系統的講解數系的代數結構，雙軌並進。
12. 數的概念、代數、幾何等三個部門分開在各年級講授，各成一系統。
13. 在中學九年之中未曾講授機率與統計。

四、結論

綜觀教材本身，可得下列之結論

1. 教材編寫較形式化，理論化，說理清楚而有

條理。

2. 相似之教材安排得較集中而不採用螺旋式。
3. 幾何教材較注重理論之說明，惟幾何證明較少。
4. 各章節所附之習題非常之多，學生有練習之機會。

五、評論

1. 由於德國中學為九年一貫，因此教材能夠做統合通盤之考慮，各部份教材都能完整而有系統的詳加解說。
2. 該教材之編寫較為形式化，有時難免顯得過於嚴肅。
3. 由對稱觀念說明三角形，四邊形之性質，是否比傳統好，值得商榷。
4. 集合與邏輯觀念說明得很詳細，對於培養學生思考推理能力似有很大之助益。
5. 沒有機率與統計之教材，誠為一個闕失。
6. 書中講到計算尺之原理及用法，但無電子計算機之教材。
7. 書中習題很多，學生可依程度選擇練習，無須求助於參考書，很值得借鏡。

六、建議

1. 我國數學課本之編寫除了注重理論之嚴密外，並應注重實用性，具體性教材，兼顧學生升學與就業之須要。
2. 應增加操作性之教材，使學生能從做中學，使國中數學不致變得太枯燥。
3. 教材之編排宜採螺旋式，使學生有反饋之機會。
4. 為配合上課時數，宜精簡教材之內容，去蕪存菁，以免雜亂無章。
5. 各章節之後宜多列習題，同時，例題與習題必須精選，以達到練習之目的。
6. 應編寫指導要旨，指引老師教學之方向，並提供老師常識性之資料，幫助其教學。