

# 有趣數學

## 真分數化小數之探討

黃來興

金門安瀾國小

國小裏數學這門功課對某些學生來說，是一門不受歡迎的學科，尤其是對於一些智力發展緩慢的學生更甚。學生往往因為學習發生困難而減低學習的興趣。興趣一低落，就會影響到聽課的情緒，學習效果也就會跟著降低。這樣學生對數學就更感到困難了，不但對數學不感興趣而且產生恐懼的心理。因此，我們在教授數學時要把學生認為是枯燥無味的問題加以修飾滋潤，以引起學生的學習動機，增進學習興趣。更重要的是要以日常生活中實際經驗到的問題引起學生學習數學的需要感，進而提高學習的興趣。一個教師的教法運用以及對於教材的安排與充實對學生日後的影响最為深刻嚴重。因此，做為一個國小教師，尤其是數理老師，應不斷地充實自己，吸收新的知識，使用新的教法，以及生動的教材，才能勝任愉快。國小數學中分數化小數的教材，有一些有趣的資料可提供一部分給學生參考練習。

小數有兩種，即有限小數與無限小數，而無限小數又可分為循環與不循環兩種。真分數化小數時，在何種情形之下能化為循環小數；在何種情形之下能化為有限小數；在那種情形之下能化為純循環數或混循環小數；這些數是否跟真分數的數字則有關；能否找出一種或幾種規則；以質數為分母的分數和以合數為分母的分數有何種關係或何種性質可循都是很有趣的問題。

現將以2以上之整數為分母的真分數化為小數之例子提供如下：

$$\frac{1}{2} = 0.5 \quad \frac{1}{3} = 0.\bar{3} \quad \frac{2}{3} = 0.\bar{6} \quad \frac{1}{4} = 0.25$$

$$\frac{3}{4} = 0.75 \quad \frac{1}{5} = 0.2 \quad \frac{2}{5} = 0.4 \quad \frac{3}{5} = 0.6$$

$$\frac{4}{5} = 0.8 \quad \frac{1}{6} = 0.1\bar{6} \quad \frac{5}{6} = 0.8\bar{3}$$

$$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857} \quad \frac{2}{7} = 0.\overline{285714} \quad \frac{3}{7} = 0.\overline{428571}$$

$$\frac{4}{7} = 0.\overline{571428} \quad \frac{5}{7} = 0.\overline{714285} \quad \frac{6}{7} = 0.\overline{857142}$$

以7為分母的真分數化為小數均為142857這六位數字為一組而循環。

$$\frac{1}{8} = 0.125 \quad \frac{3}{8} = 0.375 \quad \frac{5}{8} = 0.625$$

$$\frac{7}{8} = 0.875 \quad \frac{1}{9} = 0.\bar{1} \quad \frac{2}{9} = 0.\bar{2}$$

$$\frac{4}{9} = 0.\bar{4} \quad \frac{5}{9} = 0.\bar{5} \quad \frac{7}{9} = 0.\bar{7} \quad \frac{8}{9} = 0.\bar{8}$$

以9為分母的真分數化為小數後均用分子的數字做為小數位數字而循環。

$$\frac{1}{10} = 0.1 \quad \frac{3}{10} = 0.3 \quad \frac{7}{10} = 0.7$$

以10為分母和以9為分母一樣用分子之數做為小數數字，但沒有循環。

$$\frac{1}{11} = 0.\overline{09} \quad \frac{2}{11} = 0.\overline{18} \quad \frac{3}{11} = 0.\overline{27} \quad \frac{4}{11} = 0.\overline{36}$$

$$\frac{5}{11} = 0.\overline{45} \quad \frac{6}{11} = 0.\overline{54} \quad \frac{7}{11} = 0.\overline{63} \quad \frac{8}{11} = 0.\overline{72}$$

$$\frac{9}{11} = 0.\overline{81} \quad \frac{10}{11} = 0.\overline{90}$$

以11為分母之真分數，化為小數時，其循環數字之和為9而且排列很有規則，即從0.9, 1.8, 2.7一直排列。

$$\frac{1}{12} = 0.08\overline{3} \quad \frac{5}{12} = 0.41\overline{6}$$

$$\frac{7}{12} = 0.58\overline{3} \quad \frac{11}{12} = 0.91\overline{6}$$

因  $12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$  故以12為分母的真分數化為小數有兩位不循環，而循環數字只有一位，而且和以3為分母的循環數一樣。

$$\frac{1}{13} = 0.\overline{076923} \quad \frac{2}{13} = 0.\overline{153846} \quad \frac{3}{13} = 0.\overline{230769}$$

$$\frac{4}{13} = 0.\overline{307692} \quad \frac{5}{13} = 0.\overline{384615} \quad \frac{6}{13} = 0.\overline{461538}$$

$$\frac{7}{13} = 0.\overline{538461} \quad \frac{8}{13} = 0.\overline{615384} \quad \frac{9}{13} = 0.\overline{692307}$$

$$\frac{10}{13} = 0.\overline{769230} \quad \frac{11}{13} = 0.\overline{846153} \quad \frac{12}{13} = 0.\overline{923076}$$

以13為分母的真分數，化為分數後為076923及153846兩組數字按數字大小為排頭而排列，每一數字均帶頭一次，所以兩組數字而變成為12組。

$$\frac{1}{14} = 0.0714\overline{285} \quad \frac{3}{14} = 0.2142\overline{857}$$

$$\frac{5}{14} = 0.3571\overline{428} \quad \frac{9}{14} = 0.6428\overline{571}$$

$$\frac{11}{14} = 0.7857\overline{142} \quad \frac{13}{14} = 0.9285\overline{714}$$

因  $14 = 2 \times 7$ ，故以14為分母的真分數所化之小數為混循環數，一位不循環，六位循環，而循環的一組數字亦為7為分母的那一組。利用  $(5 \times \text{分子}) \div 7 = \text{整數} + \text{餘數}$ ，那所求的整數就為不循環的數，而循環數就是以7為分母，餘數為分子所求的那一組數，如  $11/14$ ，即  $5 \times 11 \div 7 = 7 + 6/7$  所化的小數為  $0.785714\overline{2}$

$$\frac{1}{15} = 0.0\overline{6} \quad \frac{2}{15} = 0.1\overline{3} \quad \frac{4}{15} = 0.2\overline{6} \quad \frac{7}{15} = 0.4\overline{6}$$

$$\frac{8}{15} = 0.5\overline{3} \quad \frac{11}{15} = 0.7\overline{3} \quad \frac{13}{15} = 0.8\overline{6} \quad \frac{14}{15} = 0.9\overline{3}$$

$15 = 3 \times 5$  所以化成之小數亦為混循環小數，而所化之小數可用  $(2 \times \text{分子}) \div 3 = \text{整數} + \text{餘數} / 3$ ，以整數為第一位小數再接上以3為分母的循環數，即為所求，而且如果不循環的數字是偶數，所帶之循環數為6，如不循環之數為奇數，所帶之循環數為3。

$$\frac{1}{16} = 0.0625 \quad \frac{3}{16} = 0.1875 \quad \frac{5}{16} = 0.3125$$

$$\frac{7}{16} = 0.4375 \quad \frac{9}{16} = 0.5625 \quad \frac{11}{16} = 0.6875$$

$$\frac{13}{16} = 0.8125 \quad \frac{15}{16} = 0.9375$$

$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$  所以化成之小數為四位數。

$$\frac{1}{17} = 0.\overline{0588235294117647}$$

$$\frac{2}{17} = 0.\overline{1176470588235294}$$

$$\frac{3}{17} = 0.\overline{1764705882352941}$$

$$\frac{4}{17} = 0.\overline{2352941176470588}$$

$$\frac{5}{17} = 0.\overline{2941176470588235}$$

$$\frac{6}{17} = 0.\overline{3529411764705882}$$

$$\frac{7}{17} = 0.\overline{4117647058823529}$$

$$\frac{8}{17} = 0.\overline{4705882352941176}$$

$$\frac{9}{17} = 0.\overline{5294117647058823}$$

$$\frac{10}{17} = 0.\overline{5882352941176470}$$

$$\frac{11}{17} = 0.\overline{6470588235294117}$$

$$\frac{12}{17} = 0.\overline{7058823529411764}$$

$$\frac{13}{17} = 0.\overline{7647058823529411}$$

$$\frac{14}{17} = 0.\overline{8235294117647058}$$

$$\frac{15}{17} = 0.\overline{8823529411764705}$$

$$\frac{16}{17} = 0.\overline{9411764705882352}$$

17 為異於 2, 5 的質數, 所求之小數為循環數, 位數為  $17 - 1 = 16$  位循環, 而循環之數字為一組相同數字而排列, 而這組數字用  $> 17$  的數字去乘, 所得之數亦在這組數字範圍內, 十位數字中除 0, 3, 6, 9 出現一次外, 其餘之 1, 2, 4, 5, 7, 8 出現兩次。

$$\frac{1}{18} = 0.0\overline{5}$$

$$\frac{5}{18} = 0.2\overline{7}$$

$$\frac{7}{18} = 0.3\overline{8}$$

$$\frac{11}{18} = 0.6\overline{1}$$

$$\frac{13}{18} = 0.7\overline{2}$$

$$\frac{17}{18} = 0.9\overline{4}$$

$18 = 2 \times 3 \times 3$  所以有一位不循環, 用分子  $\times 5 \div 9 = \text{整數} + \text{餘數} / 9$ , 以整數為第一位分子, 餘數 / 9 化循環數做為第二位循環。

$$\frac{1}{19} = 0.\overline{052631578947368421}$$

$$\frac{2}{19} = 0.\overline{105263157894736844}$$

$$\frac{3}{19} = 0.\overline{157894736842105263}$$

$$\frac{4}{19} = 0.\overline{210526315789473684}$$

$$\frac{5}{19} = 0.\overline{263157894736842105}$$

$$\frac{6}{19} = 0.\overline{315789473684210526}$$

$$\frac{7}{19} = 0.\overline{368421052631578947}$$

$$\frac{8}{19} = 0.\overline{421052631578947368}$$

$$\frac{9}{19} = 0.\overline{473684210526315789}$$

$$\frac{10}{19} = 0.\overline{526315789473684210}$$

$$\frac{11}{19} = 0.\overline{578947368421052631}$$

$$\frac{12}{19} = 0.\overline{631578947368421052}$$

$$\frac{13}{19} = 0.\overline{684210526315789473}$$

$$\frac{14}{19} = 0.\overline{736842105263157894}$$

$$\frac{15}{19} = 0.\overline{789473684210526315}$$

$$\frac{16}{19} = 0.\overline{842105263157894736}$$

$$\frac{17}{19} = 0.\overline{894736842105263157}$$

$$\frac{18}{19} = 0.\overline{947368421052631578}$$

全部以 18 位數字循環, 而各數之數字為一樣, 即為一組數, 而這組數為十個數字中, 除 0, 9 兩數字外, 其餘皆出現兩次, 亦即第一位除 0, 9 出現一次外, 其餘之數字亦皆第一位小數出現兩次, 所以為一組規則, 又排列整齊的 18 位數循環。

$$\frac{1}{20} = 0.05 \quad \frac{3}{20} = 0.15 \quad \frac{7}{20} = 0.35 \quad \frac{9}{20} = 0.45$$

$$\frac{11}{20} = 0.55 \quad \frac{13}{20} = 0.65 \quad \frac{17}{20} = 0.85 \quad \frac{19}{20} = 0.95$$

$20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$  所以有兩位小數, 亦為有限小數, 而所求之小數為  $5 \times \text{分子}$  做為小數位, 即為所得。

$$\frac{1}{21} = 0.0\overline{47619}$$

$$\frac{2}{21} = 0.\overline{095238}$$

$$\frac{4}{21} = 0.\overline{190476}$$

$$\frac{5}{21} = 0.\overline{238095}$$

$$\frac{8}{21} = 0.\overline{380952}$$

$$\frac{10}{21} = 0.\overline{476190}$$

$$\frac{11}{21} = 0.\overline{523809}$$

$$\frac{13}{21} = 0.\overline{619047}$$

$$\frac{16}{21} = 0.\overline{761904}$$

$$\frac{17}{21} = 0.\overline{809523}$$

$$\frac{19}{21} = 0.\overline{904761}$$

$$\frac{20}{21} = 0.\overline{952380}$$

21 = 3 × 7 所化之小數位數和 7 為分母之小數位數一樣，全為六位循環，如果分子除 3 餘 2，為 095238 這組數字，不同排列，而其排列開始按 0.2.3.5.8.9 排列，如以 2 開始即為 23809，如分子除 3 餘 1 為 047619 這組數字排列，開始按 0.1.4.6.7.9 排列，如以 6 開始即為 619047 而排列，而這兩組數字均為 7 為分母而得之兩組數字除 3 而得。

$$\frac{1}{22} = 0.0\overline{45}$$

$$\frac{3}{22} = 0.1\overline{36}$$

$$\frac{5}{22} = 0.2\overline{27}$$

$$\frac{7}{22} = 0.3\overline{18}$$

$$\frac{9}{22} = 0.4\overline{09}$$

$$\frac{13}{22} = 0.5\overline{90}$$

$$\frac{15}{22} = 0.6\overline{81}$$

$$\frac{17}{22} = 0.7\overline{72}$$

$$\frac{19}{22} = 0.8\overline{63}$$

$$\frac{21}{22} = 0.9\overline{54}$$

22 = 2 × 11 所以有一位不循環，而循環數和 11 的循環數一樣，其和為九，而循環之排列從 45，36，27……81，90 而止。

$$\frac{1}{23} = 0.\overline{0434782608695652173913}$$

$$\frac{2}{23} = 0.\overline{0869565217391304347826}$$

$$\frac{3}{23} = 0.\overline{1304347826086956521739}$$

$$\frac{4}{23} = 0.\overline{1739130434782608695652}$$

$$\frac{5}{23} = 0.\overline{2173913043478260869565}$$

$$\frac{6}{23} = 0.\overline{2608695652173913043478}$$

$$\frac{7}{23} = 0.\overline{3043478260869565217391}$$

$$\frac{8}{23} = 0.\overline{3478260869565217391304}$$

$$\frac{9}{23} = 0.\overline{3913043478260869565217}$$

$$\frac{10}{23} = 0.\overline{4347826086956521739130}$$

$$\frac{11}{23} = 0.\overline{4782608695652173913043}$$

$$\frac{12}{23} = 0.\overline{5217391304347826086956}$$

$$\frac{13}{23} = 0.\overline{5652173913043478260869}$$

$$\frac{14}{23} = 0.\overline{6086956521739130434782}$$

$$\frac{15}{23} = 0.\overline{6521739130434782608695}$$

$$\frac{16}{23} = 0.\overline{6956521739130434782608}$$

$$\frac{17}{23} = 0.\overline{7391304347826086956521}$$

$$\frac{18}{23} = 0.\overline{7826086956521739130434}$$

$$\frac{19}{23} = 0.\overline{8260869565217391304347}$$

$$\frac{20}{23} = 0.\overline{8695652173913043478260}$$

$$\frac{21}{23} = 0.\overline{9130434782608695652173}$$

$$\frac{22}{23} = 0.\overline{9565217391304347826086}$$

以 23 為分母所化之小數，為一組數字排列而循環，而循環位數為 22 位。

$$\frac{1}{24} = 0.041\overline{6} \quad \frac{5}{24} = 0.208\overline{3} \quad \frac{7}{24} = 0.291\overline{6}$$

$$\frac{11}{24} = 0.458\overline{3} \quad \frac{13}{24} = 0.541\overline{6} \quad \frac{17}{24} = 0.708\overline{3}$$

$$\frac{19}{24} = 0.791\overline{6} \quad \frac{23}{24} = 0.958\overline{3}$$

24 = 2 × 2 × 2 × 3 所以不循環數為3位，而循環數亦為3之循環數字。利用分子 ÷ 3 = 一數……餘數，如餘數為1循環數為6，如為2循環數為3。

$$\frac{1}{25} = 0.04 \quad \frac{2}{25} = 0.08 \quad \frac{3}{25} = 0.12 \quad \frac{4}{25} = 0.16$$

$$\frac{6}{25} = 0.24 \quad \frac{7}{25} = 0.28 \quad \frac{8}{25} = 0.32 \quad \frac{9}{25} = 0.36$$

$$\frac{11}{25} = 0.44 \quad \frac{12}{25} = 0.48 \quad \frac{13}{25} = 0.52 \quad \frac{14}{25} = 0.56$$

$$\frac{16}{25} = 0.64 \quad \frac{17}{25} = 0.68 \quad \frac{18}{25} = 0.72 \quad \frac{19}{25} = 0.76$$

$$\frac{21}{25} = 0.84 \quad \frac{22}{25} = 0.88 \quad \frac{23}{25} = 0.92 \quad \frac{24}{25} = 0.96$$

25 = 5 × 5 = 5<sup>2</sup> 所以為兩位循環，而所化之小數為分子乘4做為小數位數字。

$$\frac{1}{26} = 0.038461\overline{5} \quad \frac{3}{26} = 0.115384\overline{6}$$

$$\frac{5}{26} = 0.192307\overline{6} \quad \frac{7}{26} = 0.269230\overline{7}$$

$$\frac{9}{26} = 0.346153\overline{8} \quad \frac{11}{26} = 0.423076\overline{9}$$

$$\frac{15}{26} = 0.576923\overline{0} \quad \frac{17}{26} = 0.653846\overline{1}$$

$$\frac{19}{26} = 0.730769\overline{2} \quad \frac{21}{26} = 0.807692\overline{3}$$

$$\frac{23}{26} = 0.884615\overline{3} \quad \frac{25}{26} = 0.961538\overline{4}$$

26 = 2 × 13 所以有一位不循環，而循環數和13為分母的循環數字一樣，全是同樣兩組數字循環。

$$\frac{1}{27} = 0.03\overline{7} \quad \frac{2}{27} = 0.07\overline{4} \quad \frac{4}{27} = 0.14\overline{8}$$

$$\frac{5}{27} = 0.18\overline{5} \quad \frac{7}{27} = 0.25\overline{9} \quad \frac{8}{27} = 0.29\overline{6}$$

$$\frac{10}{27} = 0.37\overline{0} \quad \frac{11}{27} = 0.40\overline{7} \quad \frac{13}{27} = 0.48\overline{1}$$

$$\frac{14}{27} = 0.51\overline{8} \quad \frac{16}{27} = 0.59\overline{2} \quad \frac{17}{27} = 0.62\overline{9}$$

$$\frac{19}{27} = 0.70\overline{3} \quad \frac{20}{27} = 0.74\overline{0} \quad \frac{22}{27} = 0.81\overline{4}$$

$$\frac{25}{27} = 0.92\overline{5} \quad \frac{26}{27} = 0.96\overline{2}$$

將分子乘以37做為小數位數字而循環，循環數字為三位，求出的個位數字就是循環數字的第三位。

$$\frac{1}{28} = 0.035714\overline{28}$$

$$\frac{3}{28} = 0.107142\overline{85}$$

$$\frac{5}{28} = 0.178571\overline{42}$$

$$\frac{9}{28} = 0.321428\overline{57}$$

$$\frac{11}{28} = 0.392857\overline{14}$$

$$\frac{13}{28} = 0.462857\overline{14}$$

$$\frac{15}{28} = 0.535714\overline{28}$$

$$\frac{17}{28} = 0.607142\overline{85}$$

$$\frac{19}{28} = 0.678571\overline{42}$$

$$\frac{23}{28} = 0.821428\overline{57}$$

$$\frac{25}{28} = 0.892857\overline{14}$$

$$\frac{27}{28} = 0.964285\overline{71}$$

28 = 2 × 2 × 7 = 2<sup>2</sup> × 7 所以化成之分數為2位不循環，而接著的循環數字和7為分母所化之循環數字一樣。

$$\frac{1}{29} = 0.0344827586206896551724137931\overline{}$$

$$\frac{2}{29} = 0.0689655172413793103448275862\overline{}$$

$$\frac{3}{29} = 0.1034482758620689655172413793\overline{}$$

$$\frac{4}{29} = 0.1379310344827586206896551724\overline{}$$

$$\frac{5}{29} = 0.\overline{1724137931034482758620689655}$$

$$\frac{6}{29} = 0.\overline{2068965517241379310344827586}$$

$$\frac{7}{29} = 0.\overline{2413793103448275862068965517}$$

$$\frac{8}{29} = 0.\overline{2758620689655172413793103448}$$

$$\frac{9}{29} = 0.\overline{3103448275862068965517241379}$$

$$\frac{10}{29} = 0.\overline{3448275862068965517241379310}$$

$$\frac{11}{29} = 0.\overline{3793103448275862068965517241}$$

$$\frac{12}{29} = 0.\overline{4137931034482758620689655172}$$

$$\frac{13}{29} = 0.\overline{4482758620689655172413793103}$$

$$\frac{14}{29} = 0.\overline{4827586206896551724137931034}$$

$$\frac{15}{29} = 0.\overline{5172413793103448275862068965}$$

$$\frac{16}{29} = 0.\overline{5517241379310344827586206896}$$

$$\frac{17}{29} = 0.\overline{5862068965517241379310344827}$$

$$\frac{18}{29} = 0.\overline{6206896551724137931034482758}$$

$$\frac{19}{29} = 0.\overline{6551724137931034482758620689}$$

$$\frac{20}{29} = 0.\overline{6896551724137931034482758620}$$

$$\frac{21}{29} = 0.\overline{7241379310344827586206896551}$$

$$\frac{22}{29} = 0.\overline{7586206896551724137931034482}$$

$$\frac{23}{29} = 0.\overline{7931034482758620689655172413}$$

$$\frac{24}{29} = 0.\overline{8275862068965517241379310344}$$

$$\frac{25}{29} = 0.\overline{8620689655172413793103448275}$$

$$\frac{26}{29} = 0.\overline{8965517241379310344827586206}$$

$$\frac{27}{29} = 0.\overline{9310344827586206896551724137}$$

$$\frac{28}{29} = 0.\overline{9655172413793103448275862068}$$

分母為29的真分數，化為小數後為循環小數，並且為28位循環，而循環之數字為同一組數，只是排列不同而已。

$$\frac{1}{30} = 0.\overline{03} \quad \frac{7}{30} = 0.\overline{23} \quad \frac{11}{30} = 0.\overline{36} \quad \frac{13}{30} = 0.\overline{43}$$

$$\frac{17}{30} = 0.\overline{56} \quad \frac{19}{30} = 0.\overline{63} \quad \frac{23}{30} = 0.\overline{76} \quad \frac{29}{30} = 0.\overline{96}$$

$30 = 2 \times 5 \times 3$  所以為一位不循環，而接著又為以3為分母所化之循環數字，如不循環之數字為偶數，所接之循環數字為3，如不循環數字為奇數，則所接之數字為6。

$$\frac{1}{31} = 0.\overline{032258064516129}$$

$$\frac{3}{31} = 0.\overline{096774193548387}$$

以31為分母所化之小數，以兩組數而循環。

$$\frac{1}{32} = 0.03125$$

$32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$  為5位有限小數

$$\frac{1}{33} = 0.\overline{03}$$

$33 = 3 \times 11$  所化之小數為兩位循環小數，而後面亦接著以3為分母所化之循環數。

$$\frac{1}{34} = 0.\overline{02941176470588235}$$

$34 = 2 \times 17$  後面所帶之循環數字為以17為分母所化成之循環數字。

$$\frac{1}{35} = 0.\overline{0285714}$$

$35 = 5 \times 7$  一位不循環，而後面所帶之循環  
(下接 40 頁)