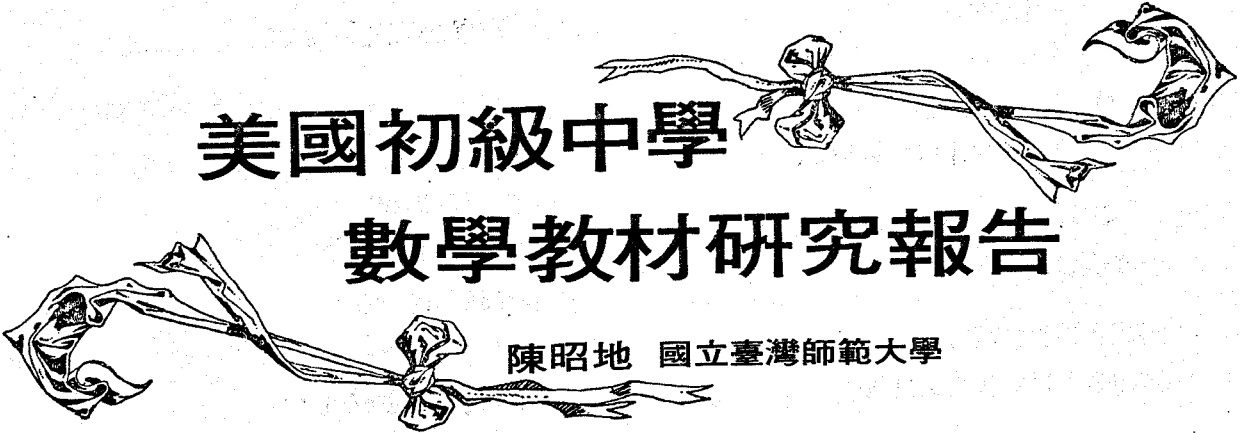




美國初級中學 數學教材研究報告

陳昭地 國立臺灣師範大學

一、引言

美國的中小學校系統，有八、四制，六、三制，六、六制等之所謂「階梯制度」的單軌型學制；自建國來就一直採取地方分權的教育制度，教育事業完全由各州自行負責，而州當局又將州的教育權限的許多部分讓給地方學區；因此，中小學教育的管理與經營仍由地方管轄；由於各州各地所訂定的標準不一（比如選修或必修；數學能力分班制；教學時數等），教材的選擇完全按學校視實際需要而有所不同，於是初級中學的數學教材彼此之間有相當的差異，欲探討它們的數學教材概況，往往會因所取的資料而有所差別；尚且目前國內有關美國初級中學的數學教材版本不甚齊全，在研究它們的教材工作上多少產生一些困難；這裏我們參照近期 Charles E. Merrill, Holt Rinehart Winston, Houghton Mifflin 及 Addison Wesley 等出版公司有關初級中學的數學教材詳細分析研究，並就 Charles E. Merrill 公司 1975 年出版之 Merrill Secondary Mathematics Series 由 J. Granening 與 William H. Nibbelink 合著之代數 I. II 及幾何內容詳細列出，多少可讓我們窺視美國初級中學數學教材內容的一些概況；最後我們將提出由這些研究中所隱含的美國數學教材的特色，也許部份值得我們國內編寫數學教材的參考。

二、美國初級中學數學教材 內容概況介紹

資料來源：J. Granening, W. H. Nibbelink
合著代數 I. II 及幾何，Charles E.
Merrill 出版公司之 Merrill Secondary Mathematics Series (1975
年出版)

代數 I 之內容：

第一章 數集

- (1) 集合的基本概念；
- (2) 集合的關係（ $=$ ， $\in$ ， $\notin$ ， $\subseteq$ ， $\supset$ ， ϕ 或 $\{ \}$ 等符號出現）；
- (3) 數集（按自然數集 N ，全數集 $W = N \cup \{0\}$ ，整數集 Z ，有理數集 Q 及實數集 R 之次序出現且逐次引入數線並列出 $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$ 之關係）；
- (4) 文氏圖解（出現字集）；
- (5) 交集及聯集（ $\cap$ 及 $\cup$ 符號出現）。

第二章 運算之性質

- (1) 代數符號（由實例引入未知數）；
- (2) 運算之性質（以簡單實例導出運算的基本性質如加法可交換，乘法可交換，加法結合性，乘法結合性，及分配性質）；

- (3) 有關實數之語句 (語句真假的判別) ;
- (4) 括弧之意義 (如 $()$, $[]$, $\{\}$ 等括號) ;
- (5) 運算之次序 ;
- (6) 利用流程圖化簡含數的運算 ;
- (7) 運算之一般性質 (加減之一般重排次序及一般之配分性) ;
- (8) 指數之表現法 (如 x^2 , y^4 , x^3 , $3y^2$, $(3y)^2$ 等)。

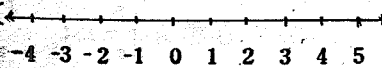
第三章 代數語言

- (1) 開放語句 ;
- (2) 解集 (開放語句在一特定集上之解集) ;
- (3) 方程式 (以一次為例解釋方程式意義) ;
- (4) 以式子表達開放語句 ;
- (5) 數對 (以看地圖為例導出坐標平面的第一象限) ;
- (6) 含兩個變數的語句 ;
- (7) 係數的意義 ;
- (8) 單項式乘積因子之重排 ($3a \cdot 4b \cdot 5c = 60abc$) ;
- (9) 式子之化簡 (含同類項之意義) ;
- (10) 公式之意義及應用。

第四章 全數集 W

- (1) 全數集之次序 ($a, b \in W, a = b, a > b, a < b$ 三者恰有一成立, 並利用數線解釋大小次序之意義) ;
- (2) 不等式及寫法 ;
- (3) 決定大小次序 (引入 $a < b \iff$ 存在 $c > 0$ 使得 $b = a + c$) ;
- (4) 分配律性質之應用 ;
- (5) 公因數 (式) (含最大公因數, 僅簡淺說明) ;
- (6) 含變數的除法 ;
- (7) 式子之化簡 ;
- (8) 解開放語句 (在 W 內解開放語句)。

第五章 整數

- (1) 數線之推展 ();

- (2) 坐標軸之推展 ;
- (3) 整數之次序 (大、小、相等, 並以數線之位置來表示兩整數之關係) ;
- (4) 整數之合成 (加法運算並圖解表示) ;
- (5) 加法性質 ;
- (6) 加法逆元 (含整數絕對值之圖示) ;
- (7) 整數之減法 (圖的說明, 並把 $a - b$ 解釋成 $a + (-b)$) ;
- (8) 式子之加減法 ;
- (9) 整數之乘法 (經由實例導得 $a \cdot b = ab$, $a \cdot (-b) = -ab$, $(-a) \cdot b = -ab$, $(-a) \cdot (-b) = ab$ 等性質) ;
- (10) 乘法性質 ;
- (11) 化簡式子 ;
- (12) 整數之除法 ($c \div a = b \iff c = a \cdot b$; 並經由實例提出 $(-a) \div b = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$ 等之性質)。

第六章 有理數

- (1) 數線之推展 (包含等價分數) ;
- (2) 最簡分數 (式) ;
- (3) 分數 (式) 之加減 (同分母) ;
- (4) 最小公分母 (含不同分母之分數 (式) 之加減) ;
- (5) 分數 (式) 之乘除法 (由實例推得 $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$) ;
- (6) 乘法逆元 ;
- (7) 有理數之次序 (並在數線上圖解說明) ;
- (8) 有理數以外的數 (指出 π , $\sqrt{2}$ 等不為有理數之實數)。

第七章 解開放語句 (線性開放語句)

- (1) 等價方程及其尋求法 ;
- (2) 解方程式 (線性方程) ;
- (3) 等價不等式 ;
- (4) 集合構式的符號 ;

- (5)等價不等式之尋求法；
- (6)解不等式；
- (7)含分式之開放語句及解法；
- (8)特殊方程之解集（無解或恒等式）；
- (9)應用問題（包含如何把問題寫成數學模型之方法）。

第八章 映射及其圖形

- (1)映射（相當於關係）與數射；
- (2)函數之意義（在坐標平面圖解說明）；
- (3)一一對應；
- (4)作圖（如 $y=x^2$ ， $y=x^3$ ， $y \geq x+2$ ）；
- (5)定義域與值域；
- (6)與坐標軸平行之直線；
- (7)直線 $y=x+c$ 及 $y=-x+c$ ；
- (8)直線 $y=mx$ （包含斜率之意義）；
- (9)直線方程式（提及斜截式及點斜式）。

第九章 比及比例

- (1)比的意義（以棒球賽得分及大小齒輪實例着提出比為比較大小之另一種適當的方法）；
- (2)正比（日常生活消費為例並作圖表示； $y=mx$ ）；
- (3)解比例式（ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad=bc$ ）；
- (4)比例尺（以看地圖為例）；
- (5)反比（ $y=\frac{m}{x}$ ）；
- (6)比之作圖（以實例着手， x ， y 軸之單位長因需要可取得不相同）；
- (7)平均速度。

第十章 聯立開放語句（二元一次方程式，不等式）

- (1)解集之圖解；
- (2)線性方程式之形式（包含圖解）；
- (3)線性不等式之形式（包含圖解）；
- (4)聯立方程式及不等式（包含圖解）；

- (5)消去法解聯立方程式；
- (6)代入法解聯立方程式；
- (7)經由兩點之直線方程式；
- (8)應用問題。

第十一章 平方根的使用

- (1)由 $y=x^2$ 之函數圖表解釋平方與平方根的意義；
- (2)由函數 $y=x^2$ 圖形讀平方根；
- (3)平方根及平方表（包含近似值之意義）；
- (4)根數（式）之化簡（包含最簡根式，處理平方根並由特例導出 $\sqrt{n}\sqrt{m}=\sqrt{nm}$ ， $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}}=\sqrt{\frac{n}{m}}$ ， $m, n > 0$ 等關係式）；
- (5)分母含根式之去除法；
- (6)畢氏定理（由圖形及公式證明）；
- (7)距離公式（平面上兩點之距離）；
- (8)公式的主題（例題均選自理化等相關課程的公式）。

第十二章 多項式

- (1)整式之化簡；
- (2)多項式的分類；
- (3)多項式之乘法；
- (4)二項式相乘（並以面積圖解說明）；
- (5)特殊公式之展開（ $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ ； $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ ）；
- (6)解方程式（能簡化成一元一次方程式之一元二次形式者）；
- (7)恒等式之意義。

第十三章 二次方程式

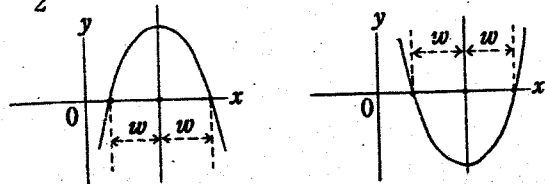
- (1)一元二次函數之形式及作圖；
- (2)對稱軸（包含拋物線最大點與最小點的意義）；
- (3)最大點及最小點（先由圖形看出；再由對稱性質找出 $f(x)=ax^2+bx+c$ 圖形之最大點或最小點之 x 坐標為 $-\frac{b}{2a}$ ）；

(4)一元二次方程式之圖解；

(5)解的個數；

(6)解之計算(若知道 w 其兩解為 $\frac{-b}{2a} + w$ 及

$\frac{-b}{2a} - w$ 其中 w 如下圖



因此若知 w 則此一元二次方程式可求解)；

(7)公式解(依 w 的意義求得 $w = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{|2a|}$ ；

在有解之假設下其解為 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

)；

(8)判別式(依 $b^2 - 4ac$ 之正、零或負知有兩組，一組或無實數解)。

第十四章 二次式之分解

(1)質因素(式)(包含質數、合成數及分解之意義)；

(2)分式之化簡；

(3)互質係數；

(4)有理係數質多項式；

(5)二次式之分解(包含比較係數法)；整係數二次式 $ax^2 + bx + c$ 可分解之充要條件是 $b^2 - 4ac$ 為一完全平方)；

(6)應用(化簡稍繁之式子及解一元二次方程式)。

第十五章 二次不等式

(1)一元二次不等式之形式與圖解法；

(2)在 $ax^2 + bx + c$ 中利用 $a > 0$ 或 $a < 0$ 及 $ax^2 + bx + c = 0$ 之解，解二次不等式之方法；

(3)以分解法解二次不等式；

(4)聯立方程式(含形如 $\begin{cases} y = 2x^2 + 3x - 4 \\ y = x^2 + 2x + 2 \end{cases}$ 及

$\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = x^2 + x - 2 \end{cases}$ 之二元二次聯立方程)。

第十六章 多項式之乘除

(1)多項式之乘法(複習)；

(2)多項式之升幂降幂式表法(包含它與自然數如 $36,872 = 3 \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 2$ 之關係)；

(3)多項式之除法(長除法)；

(4)尋求多項式一次因子的方法(已涉及餘式定理但正式名稱在代數II才出現；主要處理一元三次多項式之分解問題並求其根)。

第十七章 分式

(1)有理式之意義及其四則運算；

(2)有理方程式之解法及增根；

(3)方程式之隱解；

(4)繁分數化簡。

第十八章 數值三角

(1)幾何概念(線段、射線、直線、角等的表示法)；

(2)相似及應用；

(3)角的度量(量角器的用法)；

(4)銳角之正弦、餘弦、正切的意義(在直角三角形考慮)；

(5)位於標準位置之角及如此角之正、餘弦、正切之坐標表示法；

(6)簡易三角函數表。

代數II之內容：

第一章 實數

(1)數線($N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$ ，以作圖方式把 $\sqrt{2}$ 標於數線上)；

(2)實數之四則運算(包含作圖解釋乘除，已利用到相似三角形的關係)；

(3)實數之次序；

(4)實數運算性質之一些定義(包含二元運算、加法單位元素、加法逆元、乘法逆元及一些符號等式、不等式、變數意義的複習)；

- (5) 特殊符號 ($\in, =, \leq, a^{-1}, -a, \cap, A \times B$ 等) ;
- (6) “ $\forall$ 及 $\exists$ ” 之意義 ;
- (7) 實數系公理 (體公理, 次序公理, 相等公理, 完備性公理等) ;
- (8) 一般式子運算的方法。

第二章 定義定理及應用

- (1) 一些實數之定義定理範例 ;
- (2) 等價方程式及不等式 (提出一些主要工具) ;
- (3) 主平方根及 $\sqrt{a}$ 存在性之證明 ($a > 0$) (包含 $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a, b > 0$ 之簡證) ;
- (4) 一元二次方程式之公式解 (用配方導得, 判別式再出現) ;
- (5) 一元二次式之分解 (含整係數一元二次式 $ax^2 + bx + c = (px + m)(qx + n)$, $p, q, m, n \in \mathbb{Z} \iff \sqrt{b^2 - 4ac} \in \mathbb{W}$ 較形式化的證明) ;
- (6) 一元二次方程式及不等式 (含一些性質之證明) ;
- (7) 絕對值之定義 (包含 $|a| < b \iff -b < a < b$ 等關係式, 並解含絕對值之簡易方程式或不等式)。

第三章 關係及函數

- (1) 序對集 ;
- (2) 關係之定義域及值域 ;
- (3) 開放語句之圖形 ;
- (4) 函數及其最大值與最小值 (注重由圖形觀察出的直覺意義) ;
- (5) 反關係及反函數。

第四章 函數和開放語句

- (1) 單變數之線性函數 (包含直線斜率之計算方式) ;
- (2) 含兩變數之線性方程式 (標準式 $ax + by = c$

; 點斜式 $y - y_1 = m(x - x_1)$; 斜截式 $y = mx + c$) ;

- (3) 一元二次函數 ($f(x) = ax^2 + bx + c$ 之最大值或最小值為 $f(-\frac{b}{2a})$ 直接證明, 並將

$$f(\frac{b}{2a} + k) = f(-\frac{b}{2a} - k), \forall k \in \mathbb{R},$$

敘述成定理之形式) ;

- (4) 單變數之二次等式及不等式 (複習性質) ;
- (5) 單變數之多項函數 (含簡易情況之作圖) ;
- (6) 一元高次方程式及不等式之圖解法 ;
- (7) 含兩變數之開放語句 (含 $x^2 + y^2 = 25$; $y > x^3 - 4x^2 + 3x$ 之作圖) ;
- (8) 主 n 次方根 (含 $f(x) = x^n$ 之圖形, $\sqrt[n]{x}$ 之符號出現) ;
- (9) 正變及反變 (以實例為主, 屬複習性質)。

第五章 聯立開放語句

- (1) 作圖解聯立方程式 (含特殊之二元二次方程式及不等式) ;
- (2) 特殊聯立開放語句之解 (含等價聯立開放語句, 相依、矛盾之意義) ;
- (3) 聯立方程式之解法 (消去法、代入法) ;
- (4) n 個變數之線性方程式 (注重 $n = 2$, 或 3 之情況, 包含其聯立方程組之解法) ;
- (5) 角點定理 (包含三元組之意義) ;
- (6) 含兩變數之線性規劃 (實例說明)。

第六章 矩陣

- (1) 矩陣之基本意義 (以職業棒賽比賽紀錄為例引進矩陣, 並包含矩陣之相等之意義) ;
- (2) 矩陣之加減 (零矩陣、反矩陣出現) ;
- (3) 矩陣之數積 ;
- (4) 矩陣之相乘 (以消費物品價錢為例引進) ;
- (5) 矩陣與聯立方程式 ;
- (6) 逆矩陣及其求法 (列出 2×2 階逆矩陣的公式) ;
- (7) 以矩陣的運算解二元一次聯立方程。

第七章 有理式及根式

(1)基本定義之複習(變數,單項式係數,同類項,單項多變數之次數,常數多項式,最簡多項式,多項式之次數等);

(2)多項式之四則運算(含兩變數);

(3)有理係數多項式之分解(含質式之意義);

(4)有理式及其四則運算(包含最簡分式);

(5)有理方程式;

(6)根式(含無理方程式及 $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$,

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m,$$

$$\sqrt[n]{a^m b} = \begin{cases} a \sqrt[n]{b}, & n \text{ 爲奇數} \\ |a| \sqrt[n]{b}, & n \text{ 爲偶數} \end{cases} \text{等性質之簡證);}$$

(7)根式之化簡(共軛無理數(式)名詞出現)。

第八章 指數與對數

(1)指數與指數律(依次提出整數有理數,一般實數爲指數之意義及性質);

(2)對數的意義,基本定律及計算;

(3)對數表的應用;

(4)反對數($\log_a x = y \iff x = \text{anti log}_a y$ 主要用於簡單的計算上);

(5)對數換底公式;

(6)指數與對數圖形(以特例作出圖形)。

第九章 常用對數

(1)科學記號(含科學記號之有效數字);

(2)常用對數(含 $y = \log_{10} x$ 之圖形);

(3)尾數表之應用;

(4)線性內插;

(5)對數計算尺簡單原理及應用。

第十章 數列與級數

(1)數列(以日常生活有關之門牌號碼,折舊率等實例並提及Fibonacci數列1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,之實例);

(2)級數(包含 n 項和 $\sum_{k=1}^n$ 之記號);

(3)算術數列及算術級數(包含公差,算術中項之意義及算術數列一般項之求法及算術級數 n 項和之公式);

(4)幾何數列及幾何級數(包含公比,幾何中項之意義及 n 項與前 n 項和之公式,並由

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{談起,前項爲 } a,$$

公比 $r - 1 < r < 1$,之無窮幾何級數之和爲 $\frac{a}{1-r}$)。

第十一章 圓錐曲線

(1)圓(圓之方程式);

(2)橢圓(橢圓之意義並以標準型之方程式表出,並提出其圖形各部位及離心率之名稱);

(3)雙曲線(雙曲線之意義並以標準型之方程式表出,並提出其圖形各部位名稱;漸近線方程式等);

(4)拋物線(拋物線之意義,標準型之方程式,各部位名稱等)。

第十二章 函數與多項式

(1)關係與函數之複習;

(2)函數之合成及其性質(提出不具交換性,但具結合性質);

(3)反函數;

(4)一元 n 次多項式(相等之意義);

(5)多項函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 之值之求法(用代入法及綜合除法計算);

(6)多項式之除法(長除法及綜合除法);

(7)餘式定理;

(8)因式定理;

(9)多項方程式之根(包含近似根的位置之尋求,並已隱約用到「連續性質」)。

第十三章 二次方程及聯立方程

- (1)有理係數一元二次方程式的根(複習)；
- (2)分解一元二次式(包含不可分解多項式之意義)；
- (3)一元二次方程式根與係數之關係；
- (4)聯立線性方程式(複習性質)；
- (5)聯立二元二次方程式(包含圖解)；
- (6)用矩陣原理解線性聯立方程(以三元為例利用矩陣基本性質得出)。

第十四、五章 三角

除包含第一冊數值三角之複習外並引入 csc , sec , cot 三個三角函數及極坐標；介紹正弦定律，解三角形，餘弦定律，簡易三角恒等式，複角公式，倍角公式，半角公式；三角形之面積；反三角函數等約略與國內現行高中三角部份相當。

第十六章 平面上之向量

- (1)有向線段；
- (2)平移及其合成；
- (3)向量的意義；
- (4)向量之減法(包含零向量，反向量)；
- (5)向量之數積及其性質；
- (6)位置向量及向量之長；

第十七章 複數

- (1)複數的意義(由平面上之向量引出複數之形式)；
- (2)複數之加減乘除(包含 $3 \cdot i$ 之幾何解釋)；
- (3)共軛複數；
- (4)二項式定理；
- (5)一般一元二次方程式的根。

幾何：

第一章 現實世界環境中的幾何

- (1)幾何圖形(於日常生活環境周圍中列舉簡單之

幾何圖形如長方體、正方體、球、圓柱、圓錐、角柱、方錐、長方形、正方形、直線、射線、角等)；

- (2)長方體與立方體(包含各部位之名稱如面、頂點、稜等，平行的意義及記號“ $\parallel$ ”，且把正方體或長方體沿適當的稜裁剪之技巧對應出平面上之展開圖形)；

- (3)瓷磚與對稱(由地板牆壁之鋪設瓷磚方式，引入全等，半轉對稱及線對稱之直觀幾何概念)；

- (4)長度單位：英制與米制(除它們之互相關係外，並包含長方形面積、長方體體積之公式；面積及體積公式之來源依特例著手，隱隱約約以近似方式求一般不甚規則之圖形面積或體積之方式)。

第二章 角隅

- (1)角的意義(由字母玩具及窗、門等建物之角隅形狀導出角即用來敘述隅之形狀；並提出角各部位名稱如頂點、邊等；並以正方形之隅視為直角而導出以實際疊合方式引入銳角、鈍角的意義；又以紙張摺合方式操作直角之作法，本節並敘述平角、周角及垂直的意義與垂直符號“ $\perp$ ”出現)；

- (2)角的量度(以“ $^\circ$ ”為單位之量角器，定出平角、直角、周角之度量各為 180° , 90° , 360° , 銳角之度量小於 90° , 鈍角之度量大於 90° 但小於 180° , 與光源配合解釋射線之意義，角之全等與相等，角的射線解釋方式)；

- (3)兩角之關係(補角、互補、餘角、互餘、對頂角等名詞出現)；

- (4)角之應用(簡介方向及一些方向之指示法包括水平線、鉛垂線、方位名稱等)；

- (5)高與距離(利用比例尺估計高與距離，仰角名詞出現)；

- (6)一些特殊活動(利用量角器及比例尺找出樹、

旗桿或建物之高；六角星形之作法）。

第三章 坐標幾何

- (1) 集合概念符號之簡單複習；
- (2) 笛卡兒坐標平面（包括各象限名稱）；
- (3) 極坐標（從指示位置之一方式談起而引入極坐標）；
- (4) 軌跡（滿足給予條件之點集提出打擊高爾夫球之軌跡，美國 ABA 籃賽得分區域的軌跡，金魚在水缸空間遊動之軌跡及平面上一些簡單區域軌跡之坐標方式表現法，並涉及複合軌跡）；
- (5) 平面上之直線方程式：

1° 方程式 $y = x$ 表示經過原點且與 δx 形成 45° 之直線；

2° 方程式 $y = x + c$ 表示經過 $(0, c)$ 且與直線 $y = x$ 平行之直線；

3° 方程式 $y = mx$ 表示經過原點斜率為 m 之直線；

4° 方程式 $y = mx + c$ 表示經過 $(0, c)$ 與直線 $y = mx$ 平行之直線。

第四章 長方形正方形之演繹

- (1) 擬合圖形（將原圖形，在保持一點不動之情況下，在平面或空間中作一適當之旋轉後，與原圖形全等之擬合其自身輪廓之方式；並列舉平面上之種種四邊形之擬合其自身方式的個數（方法））。
- (2) 關係矩形邊長的演繹（以實際操作瓷磚有 4 種擬合其自身輪廓方式，導出矩形公設，據此演繹得矩形之對邊全等且平行；矩形之對角線全等且互相平分，矩形之四個角均為直角）；
- (3) 正方形的演繹（以正方形具有八種擬合其自身輪廓的方式導出正方形公設，包含(2)中之 4 種方式據此演繹中正方形除具有矩形之性質外，尚具有四邊全等且其對角線互相垂直平分）；
- (4) 正方體及長方體（藉長方形、正方形之性質導得長方體、正方體之性質，對角線及對邊平面等名稱出現）。

第五章 三角形之演繹

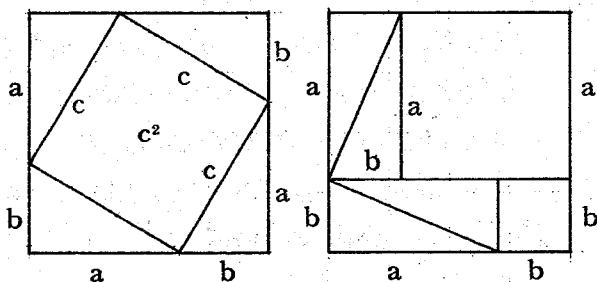
- (1) 直角三角形及等腰三角形（以一矩形分成兩全等直角三角形開始，並由兩全等直角三角形能形成一等腰三角形之直視性質導出等腰能以二種方式擬合其自身之輪廓並據此演繹得一三角形為等腰之充要條件為它具有全等之兩角 $\Leftrightarrow$ 它具有全等之兩角）；
- (2) 等邊三角形（由等腰工具談起導到等邊三角形具有六種擬合其自身輪廓之方式）；
- (3) 三角形的內角度量（用操作方式得出任一三角形之內角度量和為 180° ）；
- (4) 三角形之面積（利用任一三角形可適當地形成一矩形之一部份且此部份所佔之區域為矩形之一半，推得 $\triangle ABC$ 之面積為底乘高之半）；
- (5) 三角形之作圖（包含 SSS, SAS, SAA 三種方式；SSA 之情況是不確的）。

第六章 動態幾何

- (1) 鏡射及對稱（由一些實際圖形探討圖形之對稱軸並複習半旋轉對稱；出現對稱中心的名詞）；
- (2) 坐標平面上之鏡射（點 $P(a, b)$ 對於 x 軸， y 軸之鏡射各為 $P'(a, -b)$, $P''(-a, b)$ ，並包含三角形、長方形在坐標平面上經鏡射後所得圖形的操作）；
- (3) 菱形（由兩全等等腰三角形在平面上底接底互不重疊地形成一菱形開始；得到菱形各性質的演繹並利用菱形的性質作 1° 過不在一直線外之點作此直線之垂線，2° 作任一角之平分線，3° 作一線段之垂直平分線）；
- (4) 箏形及其性質。
- (5) 平行線與半旋轉（一直線在一鏡射下或對於一不在此直線上的點為中心之半旋轉所得之圖形用反證法證明與原直線平行）；
- (6) 平行四邊形（利用(5)之結果導出以一三角形之某一邊中點為中心之半旋轉所得之圖形與原三角形形成一平行四邊形，並演繹出平行四邊形之簡單性質及其面積公式）；
- (7) 平行線之截線（內錯角等名稱出現）。

第七章 平移

- (1) 位移 (一物體由特定方向行經一定距離之運動，並介紹有向線段相等的意義)；
- (2) 平移 (以平面上之有向線段表示，並得以其分量表示元平移亦出現)；
- (3) 平移之合成 (若 $\vec{PQ}$ ； $\vec{QR}$ 表兩平移，則 $\vec{PR}$ 表 $\vec{PQ}$ 跟隨着 $\vec{QR}$ 之合成平移，並記成 $\vec{PQ} \oplus \vec{QR} = \vec{PR}$ ；若以坐標分量表示則得 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$)；
- (4) 畢氏定理 (利用下二圖導出 $a^2 + b^2 = c^2$)；

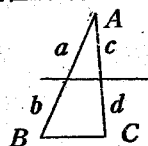


- (5) 平面上距離公式 (由畢氏定理推得平面上兩點 $P(x_1, y_1)$ ， $Q(x_2, y_2)$ 之距離 $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$)；
- (6) 畢氏定理之逆定理 (包含一語句之逆語句之意義；在 $\triangle ABC$ 中其三邊長各為 a, b, c 若 $c^2 = a^2 + b^2$ ，則此三角形為一直角形，以三角形作圖法證得)。

第八章 相似與圓

- (1) 比例圖形 (由像片等實物導出擴大或縮小之相似形意義與相似“ $\sim$ ”符號出現)；
- (2) 相似三角形 (利用在方格紙上特殊之三角形操作解釋對應邊成比例或對應角全等之兩三角形為相似)；
- (3) 三角形與截線 (利用相似或代數比例性質推得一三角形被一平行於底邊之直線所截之另兩邊之比成比例如右圖

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d};$$



- (4) 平面上之旋轉變換 (由日常生活工具、玩具談起，一圓對於其圓心具有無限階之旋轉對稱並

推得旋轉之一些性質，如以 O 為旋轉中心，經 x° 之旋轉變換若 $A \rightarrow A'$ ， $B \rightarrow B'$ 則 $\overline{AB} \rightarrow \overline{A'B'}$ ， $\triangle OAB \cong \triangle OA'B'$ ，點 O 為固定點；若線段 $\ell \rightarrow \ell'$ 則 ℓ 與 ℓ' 之夾角為 x°)

- (5) 圓之弦、弧及扇形 (包含優弧、劣弧、半徑、直徑、圓心角、圓心距等)；
- (6) 等弦之演繹 (在同圓或等圓中等弧 $\iff$ 對等圓心角 $\iff$ 對等弦 $\iff$ 對等圓心距)；
- (7) 扇形的面積 (以操作方式得到在同圓或等圓中兩扇形面積之比與等於其所夾角之圓心角度量之比)。

第九章 正多邊形及圓

- (1) 正多邊形 (以其中心為旋轉中心，此正多邊形具有有限階之旋轉對稱；並以阜氏飛輪為例隱含指出正多邊與圓之關係)；
- (2) 演繹得：
 - 1° 一圓之直徑均為其線對稱軸；
 - 2° 若一圓之直徑 (半徑) 垂直一弦則必等分其弧；
 - 3° 若一圓之直徑 (或半徑) 等分一弦則必垂直於此弦；
 - 4° 一弦的垂分線必經圓心。
- (3) 圓之方程式 (由距離公式導得，並推得圓內、圓外之不等式)；
- (4) 圓周長 (由直視看出周長與直徑之比介於 3，4 之間，並提出任一圓之周長與其直徑之比為常數“ π ”，其近似值常取成 $\frac{22}{7}$ 或 3.14)；

- (5) 圓之面積 (以等分圓為數個扇形再剪貼成一近似之矩形，依矩形面積導出圓面積 $= \pi r^2$)。

第十章 演繹

本章解釋證明問題之方法，邏輯推理；一些證明範例在代數 I，II 中之開放語句之解法或證明已略提及。

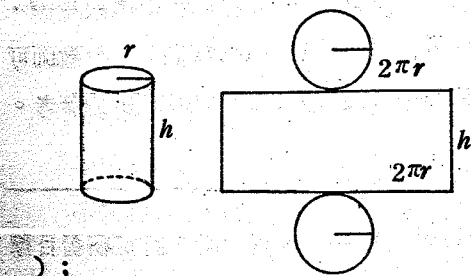
第十一章 證明方式

- (1) 一些簡單幾何命題及其逆命題之證明；

- (2) 利用畢氏定理及距離公式證明：兩不平行坐標軸之直線互相垂直之充要條件為它們之斜率乘積是 -1 ；
- (3) 利用鏡射、旋轉和平移的演繹；
- (4) 否逆命題的意義（“ $p \Rightarrow q$ ”與“ $\sim q \Rightarrow \sim p$ ”為等價命題）；
- (5) 直接證明及間接證明（以間接法證明兩相異平面具有共同之公垂線則必平行及證明 $\sqrt{2}$ 不為有理數）。

第十二章 度量幾何

- (1) 一些基本圖形之面積體積之複習；
- (2) 角柱體與圓柱之體積（由長方體體積公式導得正角柱之體積為底面積與高之乘積，一般正角柱之體積為其底面積與高之乘積；而正圓柱依其內接正角柱之情況，其體積可看成底面積與高之乘積）；
- (3) 正圓柱之表面積為 $2\pi rh + 2\pi r^2$ ， h 為高， r 為其半徑（依正圓柱展開成平面上之一矩形而看出來表面積的情況）；



- (4) 錐體體積為底面積與其高乘積之 $\frac{1}{3}$ 。

圓錐之體積及側表面積（以特殊之錐體說明）；

- (5) 球之體積及表面積（半徑為 r 之球體積為 $\frac{4}{3}\pi r^3$ ，表面積為 $4\pi r^2$ ）。

第十三章 向量幾何

用向量處理幾何問題（證明任一三角形三中線交於一點：重心；且重心到頂點的距離為其對邊中點距離的 2 倍）。

第十四章 相似變換

- (1) 相似圖形（在方格紙上實際操作相似圖形，並導出相似中心，並以 $[O, k]$ 表示之，其中 O 為相似中心， k 為比例係數，此地 k 可以為負數；它也與平面座標系拉上關係）；
- (2) 在平面上之相似變換下，原圖形與其像是相似，但距離不一定會保持。在一鏡射或旋轉或平移變換下，原圖形與其像是全等的；
- (3) 平面上兩圓之相關位置（相離、內含、相交、相切等）；
- (4) 平面上含兩圓之圖形為以其連心線為軸之雙邊對稱；
- (5) 圓之切線（包含圓與直線之關係，圓外一點到此圓之兩切線等長）；
- (6) 圓心角與圓周角與其所對弧長度量之關係；並推導得一四邊形內接於一圓之充要條件為此四邊形之對角互補。

第十五章 三角

與代數 I 所涉及者大致相同是屬複習性質；提出正餘弦函數圖形為全等。

第十六章 變換之合成

- (1) 平行線之鏡射（包含相反變換與直接變換之意義）；
- (2) 以兩平行線為軸之鏡射之合成為一平移；
- (3) 以兩垂直直線為軸之鏡射之合成相當於以其交點為中心之半旋轉變換；
- (4) 以兩相交直線為軸之鏡射之合成相當於以其交點為中心，該兩直線交角兩倍之旋轉變換。

第十七章 全等變換

- (1) 再利用向量處理一些綜合幾何（證明任一四邊形對邊中點所形成之四邊形為平行四邊形）；
- (2) 以變換為演繹之幾何性質；
- (3) 依次以三平行線為軸之鏡射之合成仍為一鏡射
- (4) 依次以三相交於一點之直線為軸之鏡射合成為

一以此交點爲中心之旋轉。

(5)先經一平移再以與此平移方向爲軸之滑動鏡射

(正餘弦函數圖形爲滑動鏡射對稱)；

(6)保距變換(僅包含簡單的意義)。

三、結論

由前所詳列的教材內容及參照其他出版公司的教材，我們可看出美國初級中學數學教材的一些特色：

1. 數學教材內容的選擇除了受大學入學考試數學委員會報告的影響外，也深受數學研究小組 (*the School Mathematics Study Group, SMSG*) 相當的影響；集合的工具很普遍地被使用。
2. 課程之安排取材經由數學教育專家、課程專家及高初中數學教師等合作，深入研究、試驗；取材內容往往經由日常生活上非正式、直觀歸納方式起始，列舉許許多多的例題，並於適當時間地點引進基本概念，也常適時地列入許多有興趣的問題及實際活動，加強學生對於概念上的瞭解，提供所需的生活經驗。
3. 以螺旋方式安排教材，新觀念的加入是逐步；且新觀念之加入前往往往先複習與此有關的概念；學生有重新學習或複習的機會。

(上接 73 頁，國民小學科學教育簡訊)

巡視，對本會邀請之學者專家，不辭勞苦前往金門舉辦研習的精神表示歡迎和感謝。研習會期間金門地方報紙也以巨幅報導，此一改進國小科學教育的活動。

自然科實驗學校教師研習

自然科五年級教師研習於五月十六日至廿八日舉行，爲期兩週新增實驗學校，各派六十六學年度擔任五年級實驗班教學教師一名參加。爲配合這次研習，本會於四月間即展開各項籌備工作；編印教材、製作教具、攝製教學影片及幻燈片，採購教具製作原料等。並於研習會舉行前邀請

4. 就所詳細列出之代數Ⅱ的內容，大抵比國內現行教材多且艱深，邏輯證明方式也常出現，部分似不適合我們採取做做；幾何操作實驗型的份量幾佔一半；又整個教材而言，很重視座標圖形等直觀概念；似值得做做。

5. 課程的安排，往往在適當的地方引入有關數學家的生平、貢獻；或數學遊戲，現行社會環境行業技能所需的數學知識介紹；增進學生學習的興趣並提醒學生學習數學的現實實用問題。

6. 習題的安排或由淺而深或分三大類(A、B、C)教師可按學生能力差異適當的選擇，達到因材施教的目標，又一般說來，教師手冊資料很豐富，除了習題解答外，也增加了不少的教材資源，詳細指導教學活動、設計；因此，教師手冊之篇幅往往比教材內容還多。

7. 在列出的課程內容中不包括任何機率統計之實際資料，但在其他的版本可看到一些簡單實用統計與機率，大體說來所涉及的内容均比英、日爲少。

8. 由以上所提之各點，教材表現得淺顯易懂，學生容易自行預習，雖篇幅很多，但教師可預期控制進度；這一點似值得我們的參考。

課程研究委員參與研習課程設計，訂定研習目標爲：1.能指出本小學實驗課程的目標和基本精神。2.能比較美國AAAS、ESS、SCIS等三種新科學課程的相同點和相異點。3.能分析一~五年級各單元科學實驗教材的系統和結構。4.能利用本課程任何一個單元教材實際教學，使大部份的學童能達成該單元的行爲目標。5.能完成指定的教具製作。6.能列舉返校後實際推行新實驗課程的步驟。此次研習由指導教授講授理論課程，編輯小組教師擔任教學單元介紹、教學過程演示、教具製作指導等課程。總以理論實際配合，知識實用並重。使參加過研習的教師，於返校後能順利推展實驗教學工作，並能發揮領導推廣作用。