

數學課程設計 和 數學教學的理論基礎 (上)

林清山 國立臺灣師範大學

一、數學課程目標的分類

數學是研究自具體世界的許許多多特殊事物中抽象化出來的秩序 (order) 和形式 (form) 的一種學問。國民中學數學課程的目的在爲此一發展階段的學生提供有關此一學問的普通教育 (general education)。在過去，所謂數學的普通教育，係在於爲學生提供各方面的基礎數學，使學生有機會試探自己的興趣和考驗自己的能力，並協助學生獲得將來從事職業時最有用的數學知識和技能。這是這一階段數學教育的試探功能和準備功能。這種數學普通教育所根據的基本哲學，即使在中學數學課程現代化的需要很強烈的今天，仍然沒有多大的不同。雖然如此，由於時代與社會結構的變遷，現在，在解釋這些基本哲學的含義方面，却發生很明顯的改變。最明顯的一個特色是現代化數學課程強調介紹數學的結構和形式，例如強調關係、函數、數學系統、正確的名詞及定義、歸納與演繹的性質與技巧、和數學模型之建造等。由於強調數學的結構和形式，現代的數學課程乃十分重視培養學生在問題情境中，能明智的解決問題所需之數學概念、原則和

技能。所以，數學的普通教育應爲學生提供順利計算的基本知識技能；協助學生能了解、欣賞、建立簡單有效的論據，能認識和分析問題情境，能辨別已知和未知的要素，能區分適當和不適當的資料，能決定是否需要更多的資料，能認識基本的關係，能偵察基本的限制和可能性，和能評鑑和解釋結果等 (Butler, Wren & Banks, 1970, PP, 43 - 46)。我國現行國民中學數學課程標準 (民國 61 年) 中所列的目標，雖然還有一些值得商榷之處尚待修改，但大體上還算接近上述的基本哲學觀點。根據該項標準，國民中學數學課程目標是：

- 1 使學生了解數與形的關係及性質，並培養其對「空間」「函數」的直觀概念。
- 2 訓練學生關於計算查表及基本作圖的技能。
- 3 培養學生以簡御繁，由已知推未知的能力。
- 4 供給學生日常生活中數量的知識，使其認識數學的應用價值，並啓發其研究自然環境中數量問題的興趣。

爲了使抽象化的或概念化的數學課程目標能夠清楚的傳達給課程編製者或數學教師，使能安排和選擇適當的課程和教材，以有效達成所預期

的目標起見，數學課程目標最好要能清楚的加以分類，或具體的加以轉譯。在過去，有人曾從不同價值觀念方面來討論數學教學的廣義目標，便是這個緣故。根據Minnick（1939）數學課程必須具備(1)實用價值（practical value）、(2)準備價值（preparatory value）、(3)文化價值（cultural value）、和訓練價值（disciplinary value）。所謂實用價值是指數學課程的安排須能幫助學生所學的數學知識技能直接應用到日常的現實生活方面。準備價值是指數學課程要能為學生將來的社會適應（例如升學就業）做必要的準備。文化價值是指要透過數學課程將人類文化中，數學的精華和重要內容和結構傳遞給學生，使其加以發揚光大。至於訓練價值是指數學課程應能訓練學生，使獲得有效思考、溝通思想、做適切判斷，和分辨價值等心理能力。在我國國民中學的現況下，數學課程應採取何種價值觀，值得慎重加以考慮。由於心理學已證明採取形式訓練說（formal discipline theory）來訓練學生的官能，並不能真正產生有利的學習遷移，所以數學課程的訓練價值已不再像過去受到重視。然而，透過數學課程設法幫助學生獲得一些有關數學的「過程技能」（process skills），似為十分重要，今日國民中學學生個別差異甚大，升學就業的需要各有不同，數學課程的實用價值和準備價值必須加以強調。然而，過份重視諸如保險、折扣、簿記、賦稅之類的實用教材、數學課程將不再為探討秩序和形式的課程。過份重視升學準備或培養數學專家，將使學生拼命死背數學難題，忽略數學的真正教育價值，或使數學教材變得十分艱深，與學生的心理發展步調相脫節。數學有數學本身的文化價值和內容，忽略數學本身的結構和系統，學習將失於零亂。但是，在知識暴漲的今天，要國中生接受這麼龐大的數學文化財產已不可能而且並不必要。如何選擇重要的數

學結構，使學生學習後能產生最大正向學習遷移，乃是值得重視的問題。所以，如何在這四個價值觀之間，作適當的權衡，使數學課程的設計能適於國中階段的學生和完滿達成國中數學課程目標，乃是我們第一項必須解決的事。

最近，已有人利用雙向細目表（specification table）來把抽象的概念化目標加以具體的分析，可以更具體的表達數學課程目標的真正意義。對課程編製者的工作和教師的教學而言，這種雙向細目表纔真正有所幫助。在細目表的縱軸裏，列出數學教材的重要內容；在其橫軸上則具體的列出要求學生能夠表現的實際行為。不管教材內容或實際行為的項目，均有編好的號碼可以代表。表一便是中學數學雙向細目表的一個很好的例子（Wilson, in Bloom, et al, 1971, PP. 646 - 647）。只要看看這種雙向細目表，便可知要利用什麼教材，要求學生學會表現什麼行為。有了這種雙向細目表，教師在擬定教學活動設計，敘寫行為目標時，便不致失去正確的方向。細目表縱軸的教材內容隨取材的不同，所分的細目當然可以和表一所列的不一樣。細目表橫軸的行為表現，隨目標的分類方法不同也可採用不同的分法。例如，如果你願意的話，細目表的橫軸也可用下列Wood（1968）的分類法來代替：

1. 知識和資料：回憶定義、符號、概念。
2. 方法和技能：計算、運用符號。
3. 理解：了解問題，轉換符號形式、仿效推理或擴展推理。
4. 應用：應用適當概念於非熟悉的數學情境。
5. 發明：對數學做創新性的推理。

總之，數學課程目標之確定、分析、和分類，乃是我們著手編製數學課程之前，所必須先加以完成的首要工作。

表一 中學數學雙向細目表 (Wilson in Bloom, et al, 1971, PP, 646-647)

(行 爲)	知 方 面															情 意 方 面										
	認 知			方 法			應 用			分 析			興 趣 態 度			欣 賞										
	A.1 特殊事實的知識	A.2 術語的知識	A.3 數學演算的能力	B.1 概念的知識	B.2 原理定律或通則的知識	B.3 數學結構的知識	B.4 轉換問題要素之形式的知識	B.5 選從一定思考方向的推理能力	B.6 閱讀和解釋問題的能力	C.1 解決例行問題的能力	C.2 比較的能力	C.3 分析資料的能力	C.4 辨認組型、同構和對稱的能力	D.1 解決非例行問題之能力	D.2 發現關係之能力	D.3 構成證明之能力	D.4 批評證明之能力	D.5 形成和驗證通則的能力	E.1 態度	E.2 興趣	E.3 動機	E.4 焦慮	E.5 自我觀念	F.1 外在的	F.2 內在的	F.3 操作的
(內 容)																										
1.0 數 系																										
1.1 全 數																										
1.2 整 數																										
1.3 有 理 數																										
1.4 實 數																										
1.5 複 數																										
1.6 有限數系																										
1.7 矩陣和行列式																										
1.8 概 率																										
1.9 數字系統																										
2.0 代 數																										
2.1 代 數 式																										
2.2 代數語句及其解法																										
2.3 關係及函數																										
3.0 幾 何																										
3.1 度 量																										
3.2 幾何現象																										
3.3 形式推理																										
3.4 座標系和圖形																										

二、「新數學課程」推廣效果的檢討

大體上說來，SMSG 乃是大家最熟悉而且公認為最具代表性之「新」數學課程。我國高中和國中的數學課程均受到它很大的影響。

新數學之所謂「新」並不是其所採用教材全新，為過去舊教材所沒有，而是所強調的重點不一樣。根據 De Cecco (1968) 的分析，新數學課程的特色有下列三點：(1)一部分教材的出現時間較過去的出現時間提早一年或二年。例如，過去在高中出現的，現在在初中出現；過去在小學六年級出現的，現在在小學四年級出現。新數學的

提倡者企圖進行「加速發展」。(2)以普遍化的大概念來貫穿和組織整個教材。因之，較過去更強調函數、關係、結構、數系、不等式、數學模式等之教材。新數學認為數學本身是一種思考的系統，而不是一大堆知識的堆積；學生應重視了解數學的結構和原則，而不是記憶事實。(3)強調閱讀和正確數學語言之使用 (P.P 583 — 599)。

新數學所強調的這些特色和要點，的確較過去的舊數學為進步，其貢獻也非常的大。兒童或學生的確較過去人們所想像的為可以早些學習數學。強調學生必須把握數學的重要結構，也的確

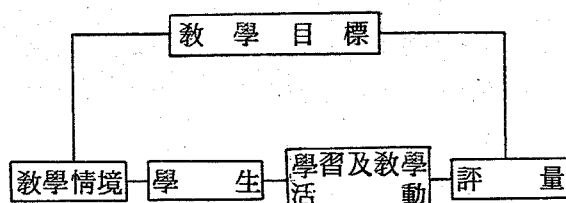
可以發生較大的學習遷移，也較適合今日複雜多變化的社會需要。然而，現在似有證據顯示：有不少弊端正發生自新數學所強調的這些優點和特色之中。根據 Fehr (1966) 的研究，發現新數學的教科書太困難、太擁擠、和太正式，忽略考慮學生的閱讀程度和學習能力。同樣的，Friedlander (1965) 也發現新數學太集中於「概念」的介紹和「概念結構」之發展，而忽略學生能否或如何纔能運用其所學。他認為新數學與學生的經驗、概念能力、和計算能力相脫節，故簡直抽象得太不仁道 (inhumanly abstract)。利用學習 SMSG 的初一學生研究的結果，Feldhake (1966) 也發現：只有能力高的學生表示喜歡新數學，他們喜歡的原因是「所教材有趣」。然而，能力低的學生則表示喜歡舊教材，他們喜歡的原因是「舊教材易懂」。所以，研究者建議新數學的難度應予以降低。Butler, et al (1970) 也認為新數學受到批評的地方是：太不關心應用，太忽略教學原則，和教師缺乏適當的訓練。

因為如同本文開頭所說的，數學是一種研究自具體世界的許多特殊事象中抽象化出來的秩序和形式之學問，所以教數學的最後目的在幫助學生能獲得這些抽象的事物。我們並不希望學生永遠必須依賴具體事物，而一直未能養成抽象思考的習慣。然而，絕對不可以因為強調這一點，而不顧及學生的發展狀態，太早介紹太抽象太形式的數學概念。否則，學生將因為操弄具體事物的機會不足，而學習失敗，對數學失去興趣，或者只操作抽象符號，而不知其所以然。上述各學者的研究已證實了這一點。數學課程的編製者應多考慮一下下面將討論的皮亞傑的看法。

三、從教學基本模式分析 數學課程設計應考慮的問題

把握住數學課程目標和數學教育的主要方向後，課程設計者應設身處地、站在教師和學生的立場想想設計怎樣的數學課程最能有效達成預期的目標。因此，這裏要利用圖一的「教學基本模

式圖」來分析數學課程設計應考慮的各種問題。由圖一可以看出，整個教學基本模式包含五個要素：亦即，教學目標、教學情境、學生、學習及教學活動、和評量。



圖一 教學基本模式

一個完美的數學課程設計均會涉及這五個要素。因之，要根據這五個要素，將數學課程設計時應考慮的問題列舉於后：

(一) 教學目標 與教學目標有關的問題為：

1. 就學習數學的目標而言，學生所要學到的到底「成果」(products)或者是「過程」(processes)呢？如果我們的數學課程所強調的是成果，則學生必須記憶許多數學事實、術語、公式或定理等知識；如果所強調的是過程，則學生必須學習如何獲得這些數學事實、術語、公式、產生的方法、學習如何像數學家一樣來解決數學方面的問題。目標不一樣，將來所安排的數學課程的性質應有所不同。
2. 編出來的新數學課程是否能夠真正反映出新數學課程所強調的精神，或是否能達成新數學課程所預懸的目標？有時，課程所強調的精神或所標榜的目標的確很理想，但是所編成的教材或安排的課程却已反映不出所強調的精神。為避免這一點，課程編製者是否具體的（例如用行為目標）將抽象的數學課程目標忠實的轉譯過來？
3. 在編製新數學課程之前，是否用工作分析 (task analysis) 的方法將這些目標加以分類並訂出層次，然後以流程圖的方式排出「學習階層圖」來？在這方面，柏隆姆 (B. S. Bloom) 的教育目標分類的方法，

以及蓋聶(R. M. Gagné)的學習階層圖的設計，均值得參考。就目標的分類來說，

是不是除了要學習數學概念、定理通則之外，也要他們學習解決數學問題的過程技能，或培養某些良好的態度？就層次的分析而言，是不是自易而難，每一層次都注意到：

以上這些與目標有關的問題，隨課程所根據的教育哲學、教育政策，以及時代和社會背景之不同，而所得答案可能不一樣。在新數學課程尚未正式編製之前，最好能夠通盤加以考慮。

(二)教學情境 這是指與數學教材或教具有關的刺激變項而言

- 1 國民中學階段的數學要採用螺旋式課程或一貫式課程？同一主題的教材要在國中一二三年級每年循環出現，愈來愈深，或者出現過後不再重複出現？算術、代數和幾何三種教材，要採用分科課程、聯絡課程、或合科課程的形式來加以組織呢？
- 2 是否年級愈低，可具體操作的教材愈多？某一主題的教材初次出現時，是否先利用可操作性的教具或視聽媒體讓學生著手學習，然後纔逐次引進抽象的教材？這是數學教材呈現(presentation)的技術問題，將會影響到學生的學習效果。有人提倡數學實驗室(mathematics laboratory)，讓學生配合課本的數學教材，進行測量、製圖、計算、衡量、估計、記錄、比較、分析、分類、尋找組型、和檢核資料等，對教材的具體化和學生的學習當有很大幫助
- 3 新數學被人所詬病的除了過份抽象以外，還有一點是太欠缺應用，和與真正世界少有關連。因之，課程編製者是否注意到在不妨礙學科本身體系之完整的範圍內，儘量採用適合國情的鄉土教材、日常生活教材、和儘量注意到與理化、生物、地球

科學等其他學科相配合？

(三)學生 這是指可能影響數學課程成敗的個體變項，尤其是學生的起點行為而言。

- 1 國民中學的學生個別差異很大，例如智力、性向、成就、動機、價值觀念、自我觀念、認知形態，甚至創造力均有明顯的不同。新編數學課程是否考慮到如何來適應這麼大的個別差異？假如不論學生的智力和數學成就如何，均要求學生用同一課本、同樣的時間來學習數學，是否為學習快速者提供充實教材和是否有辦法減少學習緩慢者的挫折？在這裏個別化教學的觀念似值得注意加以探討。
 - 2 其次，國中學生有的要升學，有的要就業。假使數學課程有其準備價值，則我們應如何適應這兩種學生的個別需要？對要升學的學生而言，國民中學的數學課程能否與高中的數學課程相銜接？對要就業的學生而言，在國中所學的數學知識技能是否有助於將來的工作？那一些是升學和就業的學生之共同必修教材？
 - 3 數學課程是否指出或描述在學習每一單元的教材之前，學生須先具備什麼起點行為？亦即學習前的知識經驗或基礎能力是什麼？蓋聶在這方面有獨特的見解，他的方法可供參考之處頗多。
 - 4 數學教材的結構是否與學生的認知結構相配合？那一些教材適合在國中數學課程出現，那一些必須挪到高中數學課程去？例如概率的教材在國中數學課程裏要介紹到什麼程度，學生的學習效果纔會最好？
- 這四點均屬蓋聶所謂的足以影響學習之內在條件，也是影響新數學課程成敗的要素。

(四)學習和教學活動 這是指促進學習的外在條件；利用這些外在條件來促進學生的學習。

1. 就學生學習數學的方法而言，本數學課程的安排到底較容易使學生使用「接受學習」或「發現學習」？教材的性質較容易導致教師採用什麼方法來教學？假定我們承認我們的教師們過去常使用太多註釋式的教學方法，則新課程中，教材要怎樣編寫教師纔會多鼓勵學生思考、探索，而把教師指導的總量加以減少？
2. 是否有良好的教學指引，告訴教師以什麼樣的順序呈現教材，以什麼方式引起學生的學習動機，以何種增強計劃來鼓勵學生，學生的學習效果最好？
3. 必須由學生牢牢記住的數學教材，是否安排習題或作業，使學生有反覆練習的機會。重要的數學概念和法則，是否有一再出現的機會？是否有機會將這些重要概念和法則遷移到，亦即應用到其他單元的活動或日常生活方面去？要使學生對數學感到興趣必須設法幫助學生產生有意義的學習，把單調乏味的練習 (drill) 或機械記憶減到最低限度。
4. 「指導發現」 (guided discovery) 兼具編序教學與啟發式教學法的優點；教師盡量鼓勵學生歸納、演繹、發現，甚或創新，但並不是毫無目的，必須將學生的學習導向目標。數學教材是否多得使教師根本找不出時間來進行此類的教學，而只拼命趕進度？

此外，教學時數的規定是否恰當？目前的師資程度和教學設備能否配合，均是值得詳細加以考慮的事。

(五) 評量 學習是一種中間歷程，其成效如何，須經由學生的反應變項來加以推知。對講究績效責任 (accountability) 的教師而言，評量是數學課程不可或缺的一環。

1. 是否有評量工具可協助教師看出預期的教學目標是否達成，或看出學生學習的進步情形及學習困難所在？換句話說，是形成

性評量 (formative evaluation) 與總結性評量 (summative evaluation) 均注意到。

2. 學習結果的評鑑是採用常模參照評量 (norm-referenced evaluation) 或標準參照評量 (criteria-referenced evaluation)。所採用的評量工具對促進數學科教學正常化是否有幫助？
3. 是否有自我評量的工具可幫助學生自我學習，自己發現學習的缺點？在這種自我評量工具裏，學生一遇到困難便有適當的指導可以引導他們去改正，甚至從而得到鼓勵。

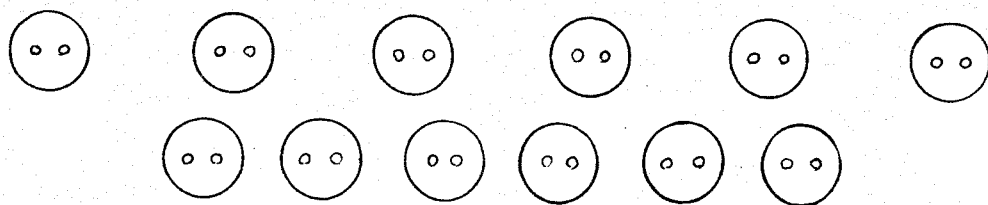
課程設計者在著手編製課程之前，如果從上述各方面去詳加研究，則相信設計出來的數學課程當能更切合實際更為完整無缺。

四、從心理學家的理論 談數學課程設計和教學

為學生而編製的數學課程，不能忽略學生本身的因素。過去的新數學如果有缺點，則其最大的缺點係在於過份以數學專家的眼光來看數學本身，而較忽略從心理學家和教師的眼光來看學生的學習與發展，這裏要討論幾位有名的心理學家的看法，以及其理論在數學課程設計和教學上的意義。（有關這幾位心理學家的理論之詳細內容，請詳林清山，民國65年）。

(一) 皮亞傑的理論 皮亞傑 (J. Piaget) 是瑞士的心理學家。他的理論對科學教育及數學教育均發生極大的衝擊。他的理論在下列三方面特別值得數學課程編製者加以重視：

1. 兒童的認知結構與成人的認知結構不同，所以兒童的思考歷程與成人的思考歷程有很大的差異。兒童想法或看法往往與數學專家的想法或看法有一段距離。如果不考慮兒童或學生的特殊運思方式，由數學專家以自認為合理的方式編製數學課程，則所編數學課程不一定能為兒童或學生所接



圖二、數量保留概念實驗

受。

皮亞傑在一連串有關「保留概念實驗」(conservation experiments)中，一再強調兒童所想的與成人所想的不一樣。我們可以舉幾個例子來說明。根據皮亞傑的說法，所謂「保留」概念是指知道「儘管某物體的外表發生改變，它的某些屬性仍然保持不變」的一種能力。譬如，對成人而言，當一物體的形狀改變或分為幾部分時，知道其質量或重量均保持不變；同一份量的液體倒在不同形狀的容器時，知道其容積仍然沒有改變。然而，兒童却不一定知道這樣。在他的一個實驗裏，皮亞傑將兒童同意是大小相同的兩個球形膠泥之中的一個，當著兒童的面前捏成香腸的形狀，然後問兒童（七歲以下）兩個膠泥是否還是一樣大。兒童的回答是香腸形的膠泥比較大，因為它比球形的膠泥長些。兒童完全憑直覺(intuition)來判斷，顯得非常自我中心。他只把注意力集中在當前的，較明顯的單一個屬性（長度）方面，而不管香腸形膠泥雖然較長但却較薄的事實。他並不了解儘管外形改變，物質仍然不變。皮亞傑認為這是因為兒童的認知結構較簡單尚未獲得「可逆性」(reversibility)之故，亦即他還不知道如果把香腸形膠泥捏回頭，使恢復球狀，則可看出兩個膠泥還是一樣大。像這樣尚不能擺脫當前明顯視覺刺激屬性之引誘和不能以反方向回頭思考的兒童，皮亞傑稱之為「前操作期」或「前運思期」(preoperational or prethought period)的兒童。到前操作期將要過去時，兒童的思考纔變得較有彈性些。此時的兒童開始會注意到香腸形膠泥並不像球形膠泥那麼厚，所以又會說香腸形膠泥比球形膠泥為小。或許他會

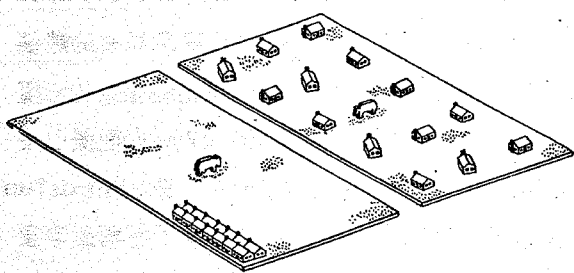
在長度和厚度兩個屬性之間來回猶豫，並開始發覺香腸形膠泥雖然較薄但却較長，可以抵補過來。用皮亞傑的話來說，此時的兒童係在「不平衡」(disequilibrium)的狀態；亦即在刺激的各種不同屬性之間徘徊不定。最後，兒童終於會了解各向度之間是彼此有關連的，亦即當香腸形變長時，其厚度也跟著變薄，長度往某一方向改變時，厚度也隨之以相反的方向改變。他終於知道變動中的物體之屬性是恒定的。於是，兒童的認知發展乃進入「具體操作期」(period of concrete operation)。

皮亞傑有關數量保留、重量保留、容量保留、和面積保留等實驗均顯示兒童的運思方式與成人的運思方式有很大的不同。在數量保留的實驗裏，實驗者可在兒童面前排兩列數量相等的鈕扣，然後將其中一列鈕扣的距離加大（參看圖二），則前操作期的兒童會說距離加大的一列、鈕扣比較多。在容量保留的實驗裏，實驗者倒一杯果



圖三、容量保留概念實驗
(Pulaski, 1971, p. 35)

汁在高狹的玻璃杯內，也倒同樣的一杯果汁在低寬的玻璃碗內（參看圖三），則大部分七歲以下的兒童會說玻璃杯內的果汁比較多，因為該果汁高度較高。一部分兒童則會說玻璃碗內的果汁比較多，因為較寬。在「兒童的幾何概念」（The Child's Conception of Geometry）一書中，皮亞傑和他的同事（1960）描述了下列有關兒童的幾何概念的實驗。實驗者在兒童面前放兩張大小相同的綠色紙板，代表農家的圍院。每一個圍院上各放入一隻木製玩具牛，然後問兒童是不是每一隻牛都有一樣多的綠草可以吃。兒童回答「是」之後，實驗者在第一個圍院中再放入一個小農舍（木製積木），然後問兒童是不是兩隻牛還是有同樣大的空間可以吃草。此時，即使年紀較小的兒童也會回答沒有農舍的那一個圍院空間比較大。其次，實驗者又在第二個圍院中放入一個小農舍，兒童會回答兩隻牛吃草的空間又相同了。像這樣，實驗者把一個小農舍放進一個圍院，愈加愈多，並反覆問吃草的空間是否一樣大。不同的一點是：第一個圍院的小農舍分散排為幾列，而第二個圍院的小農舍則靠攏在一起，排在圍院的一個角落（參看圖四）。皮亞傑的目的在於觀察



圖四、兒童幾何概念的實驗
（piaget 等，1960, p262）

從什麼時候起，兒童放棄「自兩個相等的全體之中，拿去兩個相等的部份，其剩下部分仍相等」這一歐幾里得定理的概念，而屈服在知覺形態的引誘力之下。有一部分兒童，直到每一個圍院均放有14個小農舍時，還堅持兩個圍院的空間一樣。

然而却在放入第15個小農舍時突然經不起考驗，宣稱小農舍靠攏在一起之圍院的空間比較大！（Pulaski 1971, P.P.140-150）。

2 兒童或初學某種數學概念的學生，如果缺少主動的去操作具體材料的經驗，則其發生於內部的思考歷程將不正確，而且對以後從事較深的數學所需之抽象能力的發展有不利的影響。

皮亞傑堅信「知乃是對客體施予動作」（Knowing is action on objects）。所以他強調學習必須先由具體著手，然後漸漸進入抽象；兒童或初學者從具體操作中，慢慢將感覺一動作結構予以內在化，方能使認知結構發生重組。換言之，只有主動的吸收同化，學習方能真正發生。基於此一觀點，皮亞傑認為今日國小一年級學生學習數學時，並不是被動的跟著老師朗誦 $2+2=4$, $4+2=6$, $6+2=8$ 之類的口訣，而應該是主動的玩著或操作著彩色的古氏棒條（Cuisenaire rods）或史騰積木（Stern blocks）。他們玩「跳2」的遊戲，並在遊戲中看出：某數加上2，所得的數並不是次一個較大的數，而是跳過次一個數的那一個數，例如 $3+2$ 不是4而是5。學習奇數和偶數的結構時，他們玩兩個人成對排隊的遊戲，或玩史騰積木。透過這些遊戲，他們可以領會奇數時常有一個沒同伴的積木。兒童在將物體分為不同的「群」（groups）和將它們依次排列時，他們的動作慢慢內在化，終於可以了解數的概念。例如，他們可以了解組合律（combinativity，男童和女童是兒童）、可逆性（reversibility, $2+2=4$, 故 $4-2=2$ ）、結合律（associativity, $2+(3+4)=(2+3)+4$ ）、么元素（identity, 某數加0仍為某數，某數乘1仍為某數）等性質。可見，兒童的數的概念是兒童從數珠子、把物件分組、按次序排列等簡單外在活動中，慢慢發展出來的，而不是教師由外面灌輸給他們的。

在「兒童的數的概念」（The Child's Conception of Number）一書中，皮亞傑（1965）

強調兒童必須先有機會利用成套的物體，玩一對一相對應 (one - to - one Correspondence) 的遊戲，方能慢慢學會辨別基數 (cardinal numbers) 和序數 (ordinal numbers) 的不同，因為在一對一相配對的過程中，兒童纔能直接測量兩個集合的相等性。他用各種方法幫助兒童學習，例如請兒童把每一個瓶子內的水倒入相對應的每個茶杯內；把每一朵花插入相對應的花瓶；把每一個蛋放進相對應的蛋杯上。皮亞傑發現這種學習須經過三個階段：第一、兒童認為兩個集合不相同，第二、根據直覺判斷，能看出相對應性，第三、不管組群如何改變，均可看出數目相同。經過許多這類的具體經驗後，兒童終於可以了解：數不但代表幾個相等單位的集合 ($3=3$ 個單位) 而且代表一個序列上的一個位置 ($3=$ 第三個位置)。顯然的，皮亞傑在呼籲讓兒童「從做中學」。他說：我們不能教兒童數的結構，我們只能安排情境，讓兒童在此種情境中自己去發明和發現數的結構 (Pulaski, 1971, P.P.124-139)。剝奪學生從做中學的機會，或一開始就搬來一大堆抽象的定理公式，學生學數學將容易完全失敗。雖然學生最後所要學到的是抽象的數學概念和結構，但先別直接呈現這些抽象的東西，請從具體可操作的事物入手，纔能成功。

3 數學課程的安排必須注意配合學生認知發展的水準和順序，不可企圖加速發展，也不可次序倒錯。當學生的認知結構尚無法處理抽象的數學概念時，就硬要他們學習這些抽象的數學概念時，則學生不但不能吸收同化 (assimilation)，而且可能失去學習數學的興趣。

前面說過，新數學的特色之一就是提早教學，例如，過去在高中出現的教材，現在提早到初中來教學。皮亞傑對新數學和新科學課程，企圖加速學習的這一個事實，感到十分困擾和懷疑。他認為兒童是可以自然發展的有機體，其認知發展必須經過感覺動作期、前操作期、具體操作期

、和形式操作期等時期；影響這種發展步調的乃是生物學因素所決定，而且似與年齡有密切關係存在。因之，加速發展也許有可能，但最大限度的加速發展是不可能達到的 (參看 Shulman, 1970)。在「發展與學習」一文中，皮亞傑 (1964) 強調發展纔是學習的真正原因。兒童的認知發展達到某一階段的最適當時機，學習纔有可能真正發生。皮亞傑承認教育傳遞 (educational transmission)，與成熟、經驗、和平衡化同為影響認知發展的四個主要因素，但是只有這一個因素並不足夠，因為兒童只有在他能夠了解的狀態下，他方能接受成人透過語言或教育傳遞傳給他的這些有價值的訊息。換言之，他要能接受這些訊息，他必須先有吸收同化這些訊息的「結構」才行。這就是為什麼我們不能教較深數學給五歲兒童的原因所在。五歲兒童還沒發展出可以使他了解較深數學的結構。顯然的，皮亞傑也支持兒童的發展有「關鍵期」的說法。已經有許多人重複皮亞傑有關各種保留概念的實驗，來考驗是否可以教兒童早些學會這些邏輯結構。皮亞傑承認：用外在增強也許可以使兒童學會回答正確答案，但他認為這是沒意義的。依他看來，這並不是真正的學習，那只不過是對某一特殊情境之機械記憶式的反應而已，這種學習既不穩定也不持久；一受到考驗，兒童很快的又會重犯原來的錯誤；而且他們也不會把所學到的類化到相似的情境去 (Pulaski, 1971, P.P.29-27)。皮亞傑引用 Smedslund 的實驗為例來說明這一點，Smedslund 曾經設法訓練五、六歲的兒童，使了解兩個等重的球狀膠泥，其中之一被捏成香腸狀，球狀的和香腸狀的重量仍然保持相等。他選擇「重量保留」實驗是因為兒童能夠得到外在增強，亦即，可以用天平稱看球狀和香腸狀膠泥是否真的相等。在實驗「重量保留」概念加速學習之同時，他也訓練兒童學習重量遞移性 (transitivity)，亦即等式遞移性 ($A=B, B=C, 則 A=C$)，或不等式遞移性 ($A<B, B<C, 則 A<C$)。結果，Smed-

slund 果然成功的使兒童學會把重量保留概念類化到各種情境。換言之，不管膠泥被捏成球狀、香腸狀、燒餅狀、其他形狀、或撕成小片、兒童都稱它，故知道重量還是一樣。然而，Smedslund 以同樣的方法訓練這些兒童學習遞移性，却並未成功。兒童會抗拒遞移性這一概念。有時，兒童也會預測正確。但是，他預測「可能會……」而不是預測「一定會……」。在有關重量遞移性的實驗裏，兒童從未以確定的口氣把遞移性類化到其他情境。皮亞傑認為重量保留的問題顯然包括兩方面：其一是物理經驗方面，其二是邏輯數學結構方面。上例的兒童只學到了物理經驗方面（重量保留）但卻沒學成功邏輯數學結構方面（遞移性）的事。皮亞傑認為這並不足為奇，因為邏輯結構並非物理經驗的結果。給兒童外在增強並不能使兒童獲得邏輯結構。邏輯結構只有經由內在的平衡化歷程、經由自我調整，纔可獲得（Piaget, 1964）。

總而言之，皮亞傑加速發展，提早教學，並不能使學生真正了解成人他們學習的數學概念，除非學生的認知結構已經發展到可以了解它的程度。所以，數學課程在選材方面不能不慎重考慮學生的認知發展情形。急功近利而竟揠苗助長，不但徒勞無功，而且可能扼殺學生數學方面的才能和興趣。在最近出現的第二代新數學和新科學教材裏，皮亞傑的這些觀點，已經更受到重視。

（二）布魯納的理論 對新數學和新科學課程有直接影響的心理學家當推美國哈佛大學心理學教授布魯納（J. S. Bruner）了。最值得我們注意的幾個理論要點如下：

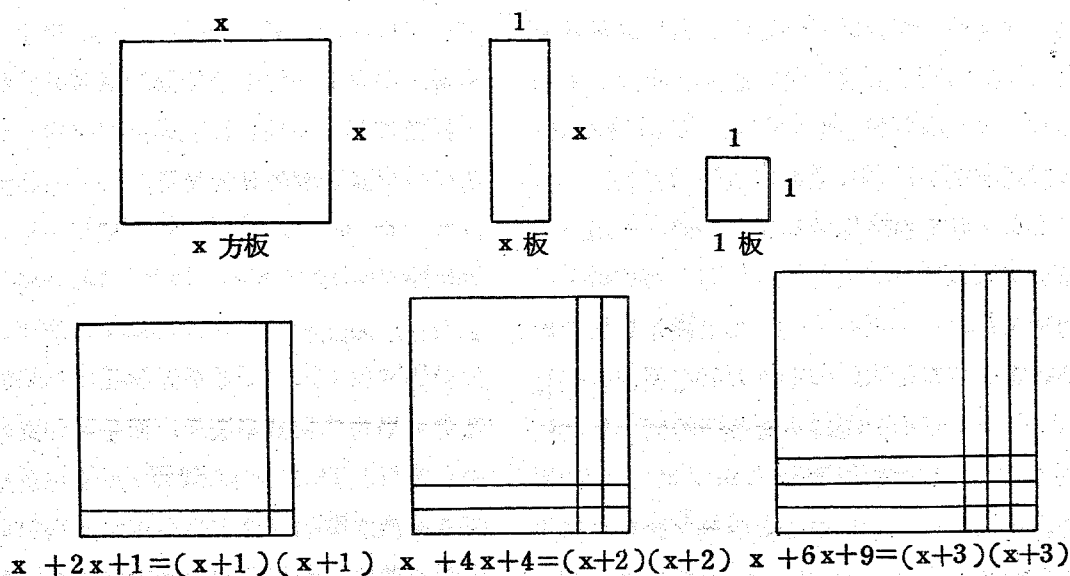
1 只要我們能夠用學生可以了解的用語來改編，或以適合學生認知發展程度的表徵方式來呈現，我們便可以提早把數學的重要概念和結構教給學生，不必空等待成熟的來臨。換言之，只要教材的結構能夠配合學生的認知結構，則學生任何時候都準備好可以學習數學。

布魯納（1960）曾經在「教育的過程」（The Process of Education）一書中，說過一句連皮亞傑也感到十分驚訝的名言：「任何一門學科都可利用某種心智上真實的方式，有效的教給任何發展階段的任何兒童」（…… any subject can be taught effectively in some intellectually honest form to any child at any stage of development）（P. 33）。以數學來說，這句話並不是說任何年紀的任何兒童都可學會任何數學概念，而是說如果我們能夠用兒童可以了解的話加以轉譯，或使兒童以適合其認知發展水準的表徵方式來學習，則兒童也能夠學會該項數學教材所隱含的數學概念。問題在於我們是否了解兒童的認知發展水準如何，和是否以「心智上真實的方式」呈現這些教材。

原來，布魯納跟皮亞傑一樣，相信兒童的認知發展可分為不同的時期，亦即「動作表徵」（enactive representation）、「影像表徵」（iconic representation）、和「符號表徵」（symbolic representation）三個時期。不同時期裏的兒童，其代表周圍世界或認識周圍世界的方式，均有不同。動作表徵期的兒童，透過動作（action）的方式，最容易了解；影像表徵期的兒童，除了透過「動作」之外，也可透過在感官裏留下「影像」（imagery）來了解；符號表徵期的兒童，則除了經由「動作」「影像」而外，開始可以透過使用抽象「符號」來了解他的周圍世界。這樣說來，布魯納就強調，只要我們改用國小兒童可以了解的表徵方式來呈現教材，我們也可幫助國小兒童學會過去國中學生纔可以學的數學教材的重要概念了。例如， $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ 這一項教材，是符號表徵式的教材，過去須到國中，學生纔可以學習。但是布魯納認為只要我們有幫助學生學習的意向，和有把這項教材的主要概念轉譯為我們所教的學生所能了解的語言之技術，則我們不必空等待成熟的來臨，也可使國小階段的兒童學會這項數學概念。

下面是布魯納自己所做的實驗，用來說明他如何把這項教材轉譯為八歲小學兒童所能了解的話，而成功的使兒童學會了此項教材的數學概念。

在一班年齡八歲的兒童上數學課時，布魯納拿出圖五上面所示的三類形式板，並與兒童共同將它們取名為「X方板」、「X板」和「1板」。



圖五 布魯納的實驗供兒童拼排的形式板

給兒童許多機會玩這些形式板後，布魯納問兒童一個問題：「你們能不能用這些形式板排出一個比x方板還大一些的正方形？」很多兒童很快就排出圖五左下方那樣的正方形出來，他們顯然不覺得困難。於是，布魯納要求兒童描述出他們怎樣排的，並教他們把做的經過記錄起來。當兒童說：「我們用一個x方板、兩個1x板、和一個1板拼成的」，就記為 $x + 2x + 1$ 。布魯納也請兒童描述新拼出來的正方形，並加以記錄。例如，一邊是x和1，就記為 $x+1$ ，所得正方形就記為 $(x+1)(x+1)$ 。因為這兩種描記的方法一樣，所以就記為 $x + 2x + 1 = (x+1)(x+1)$ 。像這樣，兒童繼續排更大的正方形（如圖五右下），並想法記錄起來；終於發現此項教材所隱含的數型(pattern)出來，亦即「當x板以2,4,6,8的比率增加時，1板就以1,4,9,16增加，等號右邊也就以1,2,3,4增加」。兒童不但學到一些有關二次方程式，而且學到如何去發現數學的規則（Shulman, 1968）。

在上例裏，因為學習者是八歲兒童，所以布魯納將該項教材轉化為「動作表徵式」教材，亦即可讓兒童動手操作的形式板，然後幫助兒童發現教材

所要交代的數學概念。這種教材因適合這時期的兒童之認知發展水準，故為真實形式(honest form)的教材，兒童也就可以了解這一個數學概念。學過這種教材的這些兒童九歲的時候，如果教師只在黑板上畫圖（如圖五的“圖”），兒童不必操作真的形式板，也可以更深入的瞭解此一數學概念。此時用圖畫表示的教材便是「影像表徵式」的教材。如果布魯納這種假設是正確的話，這些兒童十歲的時候，也許就可以學懂 $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ 的這一數學公式所代表的概念了。這種教材便是「符號表徵式」的教材，因為這公式是代表形式板或圖畫的符號。這樣說來，這些兒童並不必要等到國中時纔學這種教材。所以，布魯納認為所謂「學習預備度」(readiness)並非純由成熟因素所造成的。學習預備度是教出來的，而不是空等出來的。這種樂觀的看法，乃是布魯納與皮亞傑的理論最大不同之處。如果將同一主題的數學概念，以不同的形式，重複出現在不同的年級，而其內容愈來愈廣，程度愈來愈深，一圈一圈愈轉愈大，則這種數學課程就叫做「螺旋式課程」(spiral curriculum)。由於布魯納的理論之故，這種方式的課程設計更受到重視。

（待續）