



現行高中數學教材之我見

易 川

省立宜蘭高中

一、引言

民國五十四年，自美國引進 S.M.S.G 教材，國內中學的數學教育從此開啓了一個新紀元——注重觀念時代的來臨，但各種爭論也隨之而起，S.M.S.G 並不是一部成熟的教材，在其出生地——美國，它受到了不少的批評和責難，所以在國內引起爭論並不是偶然的。民國六十年，教育部又重新擬定教材大綱，根據這份教材大綱編著教科書有好幾種版本，它們都是道地的土產，但是它們對於高中的數學教育的沉痾並沒有發揮治療的作用，據筆者在高中執教數年的感覺，一般學生對於數學均抱著敬而遠之的心理，甚至還產生恐懼感。在以總分取勝的聯考制度下，放棄數學科的大有人在，他們覺得花大把時間去「唸」數學，得到的分數只有那麼一點，倒不如將它放棄，將這些時間和精神投到其他的學科，收穫必定更多。這種現象在大學聯考改為測驗題之後，更為普遍，考試作答，既不需計算式，也不用列出推理過程，只需在印有 A B C D E 的方格上塗鴉就成了，碰運氣的投機心理一直在支持他們的做法。筆者以為造成這種現象的原因有兩種，一種是外在的原因，它們是：

(一) 國中數學與高中數學未能密切配合：國中課程，並不以升學為主要目標，在數學方面，不論計算能力或推理組織能力的訓練及培養，都

不足以為高中課程的預備，很多重要的基本課題均被擺在選修課程中，大部份高一新生在入學之後，馬上感覺到在數學方面所受到的壓力，於是急病亂投醫，參考書、補習班等，無所不鑽，在接二連三不如意的成績之後，部份的學生就此失去信心，甚至放棄數學。

(二) 大專入學考試命題方式的偏差：使用電腦處理答案卷，公平迅速，節省不少的人力物力。但問題出在測驗題，它給高中數學教育帶來許多後遺症（其他學科亦然）。大部份的高中學生都希望能升入理想的院校，所以高中的教學活動，受到大專聯考的影響非常大，可以說完全受到它的左右，高中的教師在這種氣氛中亦難以自持。測驗題扭曲了數學的真面目，使學生產生錯覺，以為所謂數學就是一題題的問題所組成的，因而養成他們急功近利的學習態度，在尚未澈底瞭解之前，就急着解問題，他們費了極多的時間和精神為題目找答案，甚至部份高一高二的學生就在電腦數學等等的參考書中過日子，但很少有學生肯下功夫做完整的、系統的認識。至於推理組織能力，更是他們所不屑一顧的，遇到需證明的問題，總是打馬虎，從不肯確確實實去做，因而所學到的只是片片段段的解題技巧，而不是嚴整的、有機的數學。這兩個外在原因，前拉後推，使得高中數學教育難以上軌道。

至於另一種原因——內在的，就是數學教材

本身的缺失，學生每天與教材為伍，故教材的優劣影響學習情緒相當大，這正是本文所要討論的主要課題。

二、現行高中數學教材的幾個缺點

制式教育的缺點之一是忽略學生的個別差異，成千上萬的學生，使用同樣教材，一齊上課，一齊下課，不論他的智商有多高，不論他的興趣如何。在這種情形之下，編一種十全十美的教材適合於每一位學生，是非常的困難，甚至可以說不可能。所以我們只能將標準擺在一般程度上，既不能為特優的學生建空中樓閣，也不能為特劣的學生開倒車（他們需要特別的輔導）。目前常見的教科書，有東華書局版本，數理圖書公司版本及實驗本，依筆者的感覺，它們的深度是適合於優等生，對於大部份的一般程度而言，只有望書興嘆。它們有一共同的傾向，就是使數學專業化，好像每位高中學生將來都是數學系的學生。筆者將它們的缺點歸納為下列四項：

（一）不信任直覺在學習過程中的地位

我們對於環境的認識，最初由直覺開始，然後再繼之以推理，所以直覺是認識及學習的基礎，數學是超乎經驗的推理科學，但追根究底，其推理的依據——演繹的公設體系，仍然是直覺的產物，所以數學雖講究推理的嚴密，但其中直覺的成份還是相當多。高中學生在入學之前，已經受過九年的國民教育，對於基本的數字觀念和形狀觀念已有初步的認識。高中數學教材的編寫，應建立在這些初步的認識上，對於淺顯的道理，國中已講授過而且成為一般常識的定理及定義，應訴諸直覺，不必再多費唇舌，窮糾詞章。也許在數學中有一些結論與直覺的結果相反（空集合族元素之交集即為一例），但它們的討論，均已超出高中數學的課程範圍。所以筆者認為能訴諸直覺的地方，應儘量利用直覺。目前的教材中，不少的地方都以相當長的篇幅重複介紹許多直覺

上容易接受的觀念，如數系的介紹，各數系均成立的運算定律，一併討論即可，各數系特有的性質，個別強調即可，實不必就自然數、整數、有理數、實數、複數等一再重複，指數函數亦可用指數律概括各種指數，實在不必就各種指數分別討論，分數的演算，國小國中的課程中早已討論過，而且已經是一般的常識，不必再逐一定義；中間值定理的證明，如果用極限觀念解說，固然是萬無一失，但有幾位高中學生能深切體會，倒不如以圖形和水平線的相交情形解說來得簡明（它必需靠直覺領會），以上所舉，是一些較具體的事例，在一般的解說過程中，常可感覺到直覺的被忽視，而使得三言兩語可以了斷的問題，却費了許多工夫才得以解決。

（二）孤立單元太多

民國五十四年以前的教材，分成三角、幾何、代數、解析幾何等，逐年講授，各自成一獨立的系統，壁壘分明，這雖不是很理想的編寫方式，但對各支系的介紹和討論，都相當的完整深入，前後單元的互相呼應，十分理想，也少有孤立的單元。新教材將三角、幾何、代數、解析幾何融於一爐，打破建制。如此則討論時，引證容易，左右逢源；但相對的也引起了取材範圍和編排順序的問題，新教材的編排，一般而言，均能依照討論的層次逐步發展，但與其他科目的搭配則不太理想，如切線問題在高三物理中很早就出現了，但數學裡切線却編在第五冊，如果將切線排在錐線之後，對於物理課的講授，不無幫助，而且在數學課程中，也有一氣呵成的感覺。至於取材範圍，現行的教材確有加以調整的必要，因為現在的教材中，孤立性的單元相當多，如多項式，高斯引理，因式存在判別定理，因式分解的唯一性，實數系的完備性，完全性公設，黎曼球面，複數的數對定義，直線對圓的極點，點對圓的極線，球面坐標，柱面坐標等等；這些單元，對於數學系（或準備進入數學系）的學生而言，是

相當重要的基礎，但在高中數學教科書中，只有定義或簡單性質的介紹，對於討論的發展，毫無助益，徒然增加學生記憶方面的負擔。因式分解部分，許多定理都是以 $Q[x]$ 為背景，而使得這部份的討論，也成為孤立性的單元，在高中數學中，需應用因式分解的地方，如解方程式，解不等式，方程式圖形的分解等，都是以 $R[x]$ 或 $C[x]$ 為背景，但它們反而被忽略了。高中課程中，數學所佔的時數不多又要顧慮學生的負擔，教材的精煉是個亟需注意的問題，務使其去蕪存菁。高中的數學，應該是常識性的，過於專業的，偏僻的課題，實不宜選入，它們不只增加學生記憶上的負擔，還擠掉了許多更有價值的材料。

(三) 偏重性質介紹而忽略方法訓練

新教材注重觀念，所以對於定義和性質的介紹相當詳盡，定理和推論也不少，但由這些定義、性質、定理、推論能發展出那些方法？它們能處理什麼樣的數學問題？則不常被提及，也很少加以歸納，一部份只是被投射到例題中，學生不易捉著重點。也許有人以為數學就是定義和推理的架構，計算是電腦或計算器的事。其實不然，數學觀念都是相當的抽象，既無實物可供觀察，也沒有可做實驗的材料，要將這些抽象的觀念深植於印象之中，甚至還要常拿出來活用，則在學習過程中，反覆演練是不可少的，使之熟而生巧，觀念的認識與計算能力的培養是相輔相成的，記憶數學公式或定理，如果像背法律條文一樣，則談不上什麼效果，過目即忘。現在的數學教材中，許多地方對於方法的介紹均略而不提，例如因式部份，公因式公倍式等的性質解說，存在判別定理也被提了出來，但如何分解因式？什麼樣的題目該用什麼方法？甚至極重要的乘法公式都被略去，級數與數列的討論，也犯了同樣的毛病，把大部份的篇幅都挪去討論級數，數列的收斂和發散之判別，和極限之討論，但有限項級數及數列的介紹，則被濃縮於很小的篇幅中。雖然有限

項數列和級數的計算處理只是無窮項的特殊情形，但如果從教學觀點着眼，抽象程度較不明顯的有限項級數或數列必然是擺在前頭，讓學生對有限項有了處理能力，再推廣到無窮級數或數列。這些只是典型的例子，許多重要的計算公式現在也都被擺在習題中，與一般的問題相提並論，學生受這種教材精神的影響，養成一種偏差的學習方法，他們懶於計算，跟其他的學科一樣，以讀、背、看、記等方法學數學，因此在一個段落的考試之後，就大部份忘記了，越過一個學年或學期之後，差不多全部忘光了，必需等老師提起之後，才恍然大悟，如果要求他們運用自如，幾乎不可能。這就是當初學習時缺乏習題厲煉的結果。在這種情形下，部份學生轉而求諸街坊間的參考書，因為教科書無法帶給他們實在感，即使會，也不一定會解題目，這就是現在參考書大行其道的的原因，有的學生甚至以參考書為主。但一般的參考書缺乏系統的解說，整體推理的發展，只是列幾個重要的公式，其後就是例題與解答及一大堆針對電腦閱卷的測驗題，題目蒐集越多，難題越多的參考書，就是越受歡迎的參考書，數學之真面目被扭曲得面目全非，學生讀參考書的結果，只全跟著參考書走，自己一點解題能力都沒有，遇到自己沒有見過或背過的題目，就茫然不知所措，最後只有走上背一題算一題的絕路了。

(四) 編寫形式過於數學化

文章講究啓承轉合，數學教科書雖不必把精神重點擺在其文體結構，但其敘述，應能帶給學生其來有自的感覺，儘量將抽象的觀念具體化，使學生易於接受。較專門的數學書籍，其推理發展的講述，數學味道十足，定義定理推論等等，一下列了好幾個，一氣呵成，這種方式對數學系的學生，可能很適合，不必要的廢話儘可省略，但對一般高中學生而言，這會帶給他們相當大的精神壓力，就像吃藥粉而不給開水喝，難以下嚥，效果又不好。筆者以為介紹某個單元之前必先給予

動機，將學生的心境導入，再着手介紹。這種做法，雖不能普及於每個定理定義及推論，但至少應儘量朝着這個方向走，但目前的教材，對這方面的做法尚嫌不足，這種事例相當多，筆者不擬贅述。

三、幾項建議

(一) 關於國中之教學及教材，不可諱言的，國民中學之產生，既先天不足，又後天失調，師資及設備均嫌不足的情形之下冒然開辦的，各種缺失，在所難免。但我們如能逐步將缺失改正，至少比亡羊補牢要高明得多，源源不斷的學生，較後頭的必定能享受到國家的辦學經驗。但從開辦至今的國民中學曾做了多少的改進？教育當局一直昧於教育的理論與實際之距離，想要兩頭兼顧，結果兩頭落空。未經選擇的學生，程度參差，志趣各異，若要用相同的教材及教法進行教學，無異是削足適履。筆者以為，國中的教材及教學，雖無法遷就於每個學生之個別差異，但至少應就學生將來準備走的路預為鋪築，所以就業與升學的劃分，應從國中一年級開始，使它們能發揮作用，升學與就業，各使用不同的教材及課程，使畢業的學生，各有所專，就業的能有一技之長，升學的能打下堅實的基礎。以往一部份國中雖然分了升學班與就業班，但學校只把目標重點放在升學班，就業的則令其自生自滅，甚至有放牛班的封號出現，因而遭人物議，新聞媒介也亂拋升學主義的帽子。筆者以為，教育當局應有堅定的立場，為學生的將來負責，就業者固不應被貶低，升學者也沒什麼可傲的，但在不同方向的人，應有不同的教材和教法。所以筆者建議國中從入學開始，就應分別升學與就業的班次，使用不同的教材及教法，給就業者所需的職業技巧，給升學者所需的基礎訓練。

(二) 關於聯考的命題方式，測驗題對於教育

所引起後遺症已是大家所公認週知的，各學會也紛紛提出建議聯招委員會停止使用電腦閱卷，但至今只有三民主義的試題要再恢復為申論題，其他的建議仍未為聯招會所接受，此舉實非擇善固執。區區的公平，迅速是否能抵得過它對教育的深遠影響？許多電腦比我們先進的國家並未採用電腦以閱卷，其中的原因是值得我們深思的。更值得遺憾的是聯合招生委員會的監督機關——教育部並未負起督促的責任，反而自己也跟著投入，題庫的設立，企圖造成一張如來佛的手掌，使各種考試只得在其中耍弄。如此則將使正規教育萎縮，使補習班更加橫行，美國托福及GRE考試不就是血淋淋的教訓嗎？國內的補習班能從海外弄到題目，則教育部的題庫能鎖得多緊？所幸題庫並未受到命題先生們的重視，否則教育的生命必因而窒息。

(三) 關於高中數學教材：筆者以為通行全國的教材不應像櫥櫃裡的流行時裝，必得趕在時髦的尖端而後可，也不能在短時間內換上好幾套，數學教材應有其經常性及傳統性，除非必要，不可輕言易改，筆者並非主張應把古代的算經再拿來當數學教科書，而是任何改革，應以舊有的教材為基礎，逐年隨著觀念的改變而進行，各種教材均難免有其缺點及優點，將缺點減至最少乃是改革者的責任，突然用一種完全不同的教材，只是以新的缺點代替舊的缺點，並引起知識上的代溝，最近這兩次教材更換的方式，實有待改進，筆者與不少的學生家長談過，他們都覺得現在的數學教材太深太難了，連他們自己都看不懂（即使受過高等教育者亦然），難怪自己的子弟成績不理想，使得數學給人這種感覺，新教材要負大部份的責任。而且有些符號朝令夕改，各版本也不一致，使讀者如墜五里霧中，無所適從，如線段，直線，線段長等等的符號雜亂無章，這些則有待統一。