

法國中學數學課程的研討(下)

邱 守 榕 臺灣省立教育學院

第五級教材(5之 I 及 II)

I — 關係

a) 複習第六級所學的各概念，積集(卡氏積)。應用：對射。

b) 永遠從具體的實例講起；集合的分割，子集的補集。

c) 配合法文來教數學，用實例廣泛說明以下語詞的意義：定冠詞 *le*，不定冠詞 *un*，連接詞 *et* 及 *ou*，形容詞 *tout*；及其在數學語句中的用法。

II — 算術

由一數倍數所組成的集合；歐幾里得相除法(自然數除自然數)，自然數的約數；質數。

以實例說明：因數分解、公倍數與公因數的求法。

III — 相對數

a) 相對數：整數與小數，和與差。

相對數的逆數，和的逆數，差的逆數；應用於和差的加減計算，相對數乘以自然數的積(連加)；和或差乘以自然數的積。正數、負數、相對數的順序。

絕對值及符號 $|x|$ ；順序與加法。

b) (一直要等到相對數的加法與順序的

概念完全瞭解與吸收後，才可以開始教)。

兩相對數(十進位小數)的積，多個數的連乘積。正整數(指數)的乘幕。

兩乘幕的積，積的幕次。

一和乘以相對數的積；用於分析因數。

順序及乘法。

IV — 具體空間的初步認識

(只是簡單的描繪；隨即講平面上相應的概念)

直線、半線、線段、平面、半平面；兩直線的相對位置，直線與平面的相對位置，兩個平面的相對位置，相垂直的直線與平面，四面體或斜磚形(平行六面體)的頂點、面、與稜。

V — 方位與座標

根據一斜座標系測量平面上一點的位置。特別地：將兩個各具有座標格子的平面上，帶有相同座標的點對應起來；圖形的變換。

第四級教材

教師有全權就課程中所研討的不同題材安排教學的順序。

各項教材的重要性及其所需的教學時數，並不與課文所佔的篇幅成正比，以往未學過的，或不曾以同樣形式出現過的問題，一般說來都經詳

盡編寫。

到了學年度結束，由經驗所獲致的幾何學，要作為真確徹底的數學理論交付給學生。換句話說，某些事實將視為自明的、先驗的，即取為公理，其餘的則是經演繹推理而得的結論，即定理；但大量的操作練習仍是絕對不可或缺的，在講完公理及推論後，須用繪圖工具（尺、規）實際習作。此一級的數學教學，目的在使學生瞭解：何謂證明？並獲知什麼是證明所欲導致的結論，以及必須明確予以把握的諸前提。所採用的公理載在附錄中，但其他的選擇方式亦屬可行。

I — 關係

複習以前講過的或補充過的各概念：積集（卡氏積）、關係、映射、合成映射；集合的對射，對射的逆映射。

群的概念：定義（從實例中導出，即所謂的操作型定義）。

II — 相對小數及實數的近似

1. 十的乘方形成的群

相對小數，寫作 $a \cdot 10^p$ ，其中 $a \in \mathbb{Z}$ ， $p \in \mathbb{Z}$ ，或以小數點表示之：其加、乘、順序、絕對值，簡要列述具有相對小數構造的數集的基本性質。

2. 概算

a) 把一個小數看作以下區間中的元素

$$[a \cdot 10^p, (a+1)10^p]$$

$$]a \cdot 10^p, (a+1)10^p]$$

$$]a \cdot 10^p, (a+1)10^p[$$

$$[a \cdot 10^p, (a+1)10^p[$$

其中 $a \in \mathbb{Z}$ ， $p \in \mathbb{Z}$ ，並經由實例說明，如何將兩數的和與積框以適當的區間（即估計其上下界，譯者註）。

b) 對於給定的非負小數 d 及相對整數 n ，求出一小數 $x \cdot 10^n$ ， $x \in \mathbb{N}$ ，使得 $0 \leq d \cdot x \cdot 10^n \leq 1 \leq d(x+1)10^n$ （此即在求 d 的倒數的範圍，或上下界，因要求

$$x \cdot 10^n \leq \frac{1}{d} < (x+1)10^n$$

例如：設 $d = 0.0034$ ，若 $n = 2$ ，則有 $x = 2$ ， $x+1 = 3$ ，譯者註）。

c) 對於給定的非負小數 d 及相對整數 n ，求出一小數 $y \cdot 10^n$ ， $y \in \mathbb{N}$ ，使得 $(y \cdot 10^n)^2 \leq d < ((y+1)10^n)^2$ （此即在求 d 的平方根的範圍，例如，對於 $d = 2$ ，

$$\text{若 } n = -1, \text{ 可得 } (14 \cdot 10^{-1})^2 \leq 2 <$$

$$(15 \cdot 10^{-1})^2$$

$$\text{即 } y = 14, y+1 = 15$$

$$\text{若 } n = -2, \text{ 可得 } (141 \cdot 10^{-2})^2 \leq 2 <$$

$$(142 \cdot 10^{-2})^2$$

$$\text{即 } y = 141, y+1 = 142,$$

譯者註）。

d) 無限小數的數列，實數，實數的範圍（框以區間）。

3. 列出實數系構造的主要性質：

加法： $(\mathbb{R}, +)$ 為可交換群；

乘法：可結合，對於加法可分配；

順序及絕對值。

異於 0 的實數 a 均有逆數，即存在 a^{-1}

使得 $a \cdot a^{-1} = 1$ 。

所有實數對 (a, b) ， $a \neq 0$ ，均對應唯一實數 x ，稱作 b 被 a 除的商，記為 ba^{-1} 或 b/a ，使得 $ax = b$ 成立。

商數間簡單的計算。

以數值實例說明一元一次方程式與不等式。

整數指數的應用，非零實數乘方做成的群實數的近似計算。

4. 多項函數的例子（ $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 的映射），次數。

多項式的運算。

乘積 $(x+a)^2$ ， $(x+a)(x-a)$ ，

$(x-a)^2$ ，因式分解的練習。

III — 直線上的幾何

1. 直線，直線上兩點的距離，直線上的座標系。根據某一座標系一點M的座標；符號MM'在一直線上座標（系）的變換。將兩點距離表以其座標的函數。單位長度的變換。

2. 直線上點的順序，有向線（或稱為數軸），半線，線段，兩點的中點，兩點的重心點的練習。

IV — 平面上的幾何

1. 平面上的直線，兩點決定一直線，平行線。平行關係為一全等關係；以在平行關係下屬於同一類的直線做為方向的定義。

投影，對於給定方向的投影，平面到直線的投影，直線到直線的投影。

泰爾斯的講法：有關於投影的問題，對於給定方向的投影，一軸到另一軸的投影。

2. 三角形 — 泰爾斯對三角形問題立論的應用。

在一直線中點上的投影，在一直線重心上的投影，以圖形繪出給定兩點的重心，依據給定的係數。

點對稱（中心對稱）：直線的像。

正的或歪斜的平行四邊形（由對稱中心的存在與否加以定義），平行四邊形的對邊相平行，其逆亦真。平行四邊形對邊到另一邊的投影相等，其逆亦真。

3. 兩點的等勢，等勢為全等關係，向量與平移，向量的加法與平移的合成，非零向量的方向。

向量的係數積，各種性質。

對於兩個給定不同向的向量，任意向量均可表成其線型組合，且此表法為唯一。平面座標系；卡氏座標（根據一座標系的）；向量計算的練習；三角形的中線。

第三級教材

教師有全權就這一級課程中所研討的不同題

材安排教學的先後順序。

各項教材的重要性及其所需的教學時數並不與課文所佔的篇幅成正比，以往未學過的，或不會以同樣形式出現過的問題，一般說來都經詳盡編寫。

在前第四級，學生已能理解：證明是怎麼一回事。應藉著這樣的認識，隨即向學生展示合於此一級程度的代數與幾何方面的問題，教學仍遵循第四級的精神，所採用的公理載在附錄中，但其他的選擇方式亦屬可行。

I — 實數，代數的計算，數值函數

1. 複習實數加、乘運算的性質及數的順序關係，藉此視實數R為定義全序體的具體例子。

和、積、商（後者寫為 $\frac{b}{a}$ ， $a \neq 0$ ）

實數r為有理數的條件為：存在 $a \neq 0$ 及b，使得 $ar=b$ ，有理數體，有理數運算的練習。

2. R到 R^+ 的映射： $x \rightarrow x^2$ 為映成。

對於任意正數a或零，符號 $\sqrt{a}$ 或 $a^{\frac{1}{2}}$ 表示一正實數b或零，稱為a的平方根， $b^2=a$ 。

利用（數值）表，求算 $a^{\frac{1}{2}}$ 的近似值

二實數積的平方根，非零實數的倒數。

3. 多項式函數的實例，有理式函數計算的練習。

線型函數及仿射函數、階梯函數、區間上仿射函數的例子，函數的圖示。

4. 對各種數學的或非數學的問題列出方程式。

以實例說明一元或二元的一次方程式（組）或不等式（組）的寫法，係數均為常數。二元一次方程式或不等式求解的圖示。

II — 歐氏平面

1. 概念的介紹：直線的垂直，直線的方向，對於一直線的垂直投影，一軸到另一軸垂直投影的結果，對稱。

2. 平面上兩點的距離 $d(M, N)$ 。向量的範數，三角不等式。對於二相異點M與N，討論符合方程式

$$d(M, N) = d(M, Q) + d(Q, N)$$

的所有Q點的集合。

對於所有 $\triangle ABC$ ，等式 $d(A, C)^2 = d(A, B)^2 + d(B, C)^2$ 成立的充要條件為 $AB \perp BC$ （即畢氏定理）。

正交座標，兩點距離的公式。

R^2 上歐氏平面的構造（ R^2 的全部或部份）

III — 歐氏平面的幾何

1. 與給定二相異點等距離的點的集合（垂直平分線），一點至一直線的距離。

2. 圓（周）與圓盤，圓（周）與直線的交點，圓盤與直線的交點，圓的切線，由不共線三點決定一個唯一的圓。

3. 歐氏平面上的保長變換：即定義為平面自身保持距離的對射，例如：平移，中心對稱，垂直對稱。

保長變換下直線的像，保長變換保存住直線間的垂直關係與平行關係。

保長變換群（即歐氏群），保長變換合成的簡單例子，由正交座標系基底的像求出平面所經的保長變換，亦可由給定三角形的像求算之。

保長變換保存兩軸的垂直投影，逆之亦真。

幾何角：定義成具有同頂點的二射線在保長變換下全同的射線組。

4. 圓（周）的對稱，等長的圓弧，在以 $\overline{AB}$ 為直徑的半圓周上，一點M的座標，以圓弧 $\widehat{AM}$ 之長量之。（勢必假設：圓弧上單位弧度存在，而半圓周之長恒為一定）應用此測度可定出兩個方向或兩條半直線的夾角。

用三角函數值表查出一角的度數與分數；夾角的正弦、餘弦、正切函數值。

5. 保長變換保存住共頂點（或共分角線）的二半線做成的聯集或二直線的聯集整體地或大域地不變。（即保長變換亦保角）

關於等腰三角形、菱形、矩形、正方形的練習。

第二級教材

A 班

必修課程

- I 集合語言
- II 實數（ R ）
- III 單變數實變函數
- IV 向量

C 及 T 班

- I 集合語言
- II 實數（ R ）
- III 單變數實變函數
- IV 幾何及（實）向量空間
- V₀ 有距平面幾何
- V_T 有距幾何
- VI_T 數值計算練習

第一級教材

A 與 B 班

共同課程 2 小時

- I 一般概念
- II 單變數實變函數
- III 統計與機率
- 補充課程及小時

（B必修，A選修）

- I 與 I' 內積及圓函數
- II 數值計算

C、D、E 班
（C、E 6 小時；D 5 小時）

- I 一般概念
- II 單變數實變函數
- III 等式與不等式
- IV 向量幾何與射影幾何（D不修後者）
- V 內積與圓函數
- VI 平面及空間上有距幾何（D不含空間）
- VII 統計與機率

畢業級教材

A 班 必修 2 小時 指數與對數函數
補充 2 小時 機率的計算

- B 班 必修 5 小時
- I 單變數實變函數的研討
連續性、極限概念、導數概念
- II 積分的計算
- III 基本函數
- IV 統計與機率

C、D、E 班

- I 自然數
- II 實數；數值計算；複數
- III 微分
- IV 積分

V_{C, E} 實變函數的例子 V_D 代數與幾何初步

VI_{C, E} 歐氏平面幾何補充 VI_D 再加統計

VII_{C, E} 有限集合上的機率

四、教學方法

教學方法的詳盡說明是法國教育中央集權制的另一具體表現，在課程標準的小冊中，教學方法的篇幅約佔五分之四強，可見法國人對於教學方法之重視了。

教學方法篇分為兩大類，先說明一般方法，再分級講述各項教材的教學，教材的來龍去脈，不同題材的聯繫，及題材的表現法等。

雖然，教材綱要因時代的要求有了相當的調整，有的內容增加了，有的刪減了，有的份量加重了有的減輕了，有的方法強化了，有的技巧退化了，但是就整個數學教育的精神來說，教學態度、教學原則是不會有背向教育目標的變異的，只要課程的內容保存並表現數學處理實際問題的精神，教材能顯示數學「能傳、能統」的功能，教學方法大概是一脈相承的。

法國教育制度的規畫與組織，使其得以累積前人的經驗而能屢有發展改進。

教學一般方法的說明承接了1938年9月30日公佈的主要原則與指導要領，在1946年10月再修訂成案。補充說明於1957年一月完成。到了1971年4月再增述有關計算的教學法。

因為法國中學的數學課程在我國現階段是絕對行不通的，所以對於特定教材教學法的說明，我們暫不予細考深究。要指出的，供給我們自己將來編訂課程借鏡的一點是：在說明教法時，法國人不再純形式化或抽象化了，他們幾乎都在題材下舉出有意義的實例，不厭其煩的解釋清楚。

一般的教學法說明以下諸點：

1. 中等學校數學教學的目標。
2. 中等學校數學教學的精神。

(心靈智慧的培養，不重權威而重自由精神)

3. 中等學校數學教學的方法。

(注重主動的學習，引起動機，注重應用，給予一定份量，經常的練習，注重循序漸進的學習。)

4. 作業的編制與教學活動的安排。

1° 教室的編組與準備

(注重課程的進度與範圍，與其他科目的聯繫，作業的計畫，及教學的韻律，教課前的準備等)

2° 教學活動

(注重具體的操作、實例，注重啓發新知及懷疑的精神，藉用模型，注重視聽，注重共同學習，即群育，注重語言能力的訓練，鼓勵自動自發的精神，注重文字敘述的能力)

五、總 結

我們用以下幾點說明研討法國數學教育的感想。

1. 數學教育應與語言教育及其他科目互相配合聯繫。

2. 數學教育應注重計算，教學及作業時數應充足。

3. 教學法必須特重實例與模型。

4. 數學教育是科學教育，重實驗與自由的精神。

5. 教材與課本不能一概而論，後者僅為前者的一種表現，課本的編寫應時時求改進，但教材的呈示更為補課本文字敘述之不足。

6. 法國中學教育雖分為不同類型，很早便分派學生就讀不同學校學習不同課程，但教育制度的單一化仍是其所追求的理想，此理想的精神即所謂的人道主義，相信人雖有資質之不齊，但均賦有潛能，教育的功能則在於發揮這種潛能，以改進整个人類社會。我國義務教育延長至九年是一種極進步的成就，如何充實國民教育的內容並解決當前面臨的種種實施上的困難問題，似乎不是從原有的單一學制進行分解便能達成的。課程實驗研究的工作所探討的是內容與方法，關於學制的改革則是整個教育計畫中的課題！