非十進位的計算

葉招定 省立臺南二中

設 $\{u_i\}_{i=0}^{\infty}$ 爲一無限整數增數列，$u_0=1$，$u_i<u_{i+1}$，M是任一已予自然數且 u_n 是數列中不大於M的最大項，〔 〕表示高斯函數，則依長除法有如下之關係：

$$
\begin{array}{ll}
M=q_nu_n+r_n & 0\leq r_n<u_n \\
r_n=q_{n-1}u_{n-1}+r_{n-1} & 0\leq r_{n-1}<u_{n-1} \\
r_{n-1}=q_{n-2}u_{n-2}+r_{n-2} & 0\leq r_{n-1}<u_{n-2} \\
\vdots & \vdots \\
r_{i+1}=q_iu_i+r_i & 0\leq r_i<u_i \\
\vdots & \vdots \\
r_2=q_1u_1+r_1 & 0\leq r_1<u_1 \\
r_1=q_0u_0 &
\end{array}
$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
q_n=[\dfrac{M}{u_n}] \\
q_{n-1}=[\dfrac{r_n}{u_{n-1}}] \\
q_{n-2}=[\dfrac{r_{n-1}}{u_{n-2}}] \\
\vdots \\
q_i=[\dfrac{r_{i+1}}{u_i}] \\
\vdots \\
q_1=[\dfrac{r_2}{u_1}]
\end{array}
\right\} \quad (1)
$$

最後一式的餘數 $r_0=0$（$\because u_0=1$），且若$r_i=0$（$n\geq i\geq 1$）則 $q_{i-1}=q_{i-2}=\cdots=q_0=0$，由(1)合併即得

$$M=q_nu_n+q_{n-1}u_{n-1}+\cdots+q_iu_i+\cdots+q_1u_1+q_0u_0 \qquad (2)$$

其中 $q_i=[\dfrac{r_{i+1}}{u_i}]$。 $\because 0\leq r_{i+1}<u_{i+1}$

$$\therefore 0\leq q_i\leq\frac{r_{i+1}}{u_i}<\frac{u_{i+1}}{u_i}$$

吾人稱(2)式爲由 $\{u_i\}_{i=0}^{\infty}$ 所決定數系中正整數M的表示法。

由(1)式知 $r_i=q_{i-1}u_{i-1}+q_{i-2}u_{i-2}+\cdots+q_1u_1+q_0<u_i$（$1\leq i\leq n+1$） (3)

反之，給予滿足(3)式之一個非負整數數列 $\{q_0, q_1\cdots\cdots q_n\}$，於由 $\{u_i\}_{i=0}^{\infty}$ 所決定的數系中，恒有一數可表爲 $q_nu_n+q_{n-1}u_{n-1}+\cdots+q_1u_1+q_0u_0$。但不等式 $0\leq q_i<\dfrac{u_{i+1}}{u_i}$ 不恒爲充分性（見後面 Ⅲ）

考慮一特殊數列 $u_i=b^i$，其中 b 是一個大於 1 的固定自然數。因 $\dfrac{u_{i+1}}{u_i}=\dfrac{b^{i+1}}{b^i}=b$ 故(2)式可表爲

$$M=q_nb^n+q_{n-1}b^{n-1}+\cdots+q_1b+q_0 \quad 其中$$

$$0\le q_i<b\text{，}(0\le i\le n) \qquad (4)$$

(4)式稱爲以 b 爲底，自然數M的表示法，簡記爲 $M=<q_nq_{n-1}\cdots q_1q_0>_b$當$M$非自然數且$M=q_nb^n+q_{n-1}b^{n-1}+\cdots+q_1b+q_0+q_{-1}b^{-1}+q_{-2}b^{-2}+\cdots$ 則簡記爲$M=<q_nq_{n-1}\cdots q_0\cdot q_{-1}q_{-2}\cdots>_b$，此種數系稱爲 b 進位系。如$b=2,3,10$ 分別稱爲二進位系，三進位系與十進位系。反之，給予一組非負整數 q_n，$q_{n-1}\cdots q_1$ q_0，$0\le q_i<b$，必有一自然數以 b 爲底而表爲 $q_nb^n+q_{n-1}b^{n-1}+\cdots+q_1b+q_0$之形式（但對一般數列 $\{u_i\}_{i=0}^{\infty}$ 却不眞）。玆討論三種特殊數系於下：

(1) 當 $b=10$ 時，$0\le q_i\le 9$，此時q_n，$q_{n-1}\cdots q_1$，q_0是常用十進位中自然數M的數字，習慣上縮寫爲$M=q_nq_{n-1}\cdots q_1q_0$（不是諸 q_i 之積）

(2) 當 $b=2$時，$0\le q_i\le 1$，即$q_i=0$或1，M可表爲

$$M=q_n2^n+q_{n-1}2^{n-1}+\cdots+q_1\cdot 2+q_0$$

若$M\le 10$，其二進位的表示法如下：

		縮寫
$1=$	2^0	1
$2=$	2^1	10
$3=$	2^1+2^0	11
$4=$	2^2	100
$5=$	2^2+2^0	101
$6=$	2^2+2^1	110
$7=$	$2^2+2^1+2^0$	111
$8=$	2^3	1000
$9=$	2^3+2^0	1001
$10=$	2^3+2^1	1010

(3) 考慮如下之Fibonacci 數例：$u_0=1$，$u_1=2$，$u_i=u_{i-1}+u_{i-2}$，$i\ge 2$。其前12項如下：

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u_i	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

由如此數例 $\{u_i\}_{i=0}^{\infty}$ 所決定之數系稱爲Fibonacci 數系，簡稱F一系。$\because 0\le q_i<\dfrac{u_{i+1}}{u_i}=\dfrac{u_i+u_{i-1}}{u_i}<\dfrac{u_i+u_i}{u_i}=2$ $\therefore q_i=0$或1，此與二進位系相同。如前面所述，F一系之任一數恒可表爲 $q_nu_n+q_{n-1}u_{n-1}+\cdots+q_1u_1+q_0u_0$ 其中 $q_i=0$或1。反之，對任一組數 q_n，$q_{n-1}\cdots q_1$，q_0（$q_i=0$或1）由Fibonacci數例 $\{u_i\}_{i=0}^{\infty}$ 所決定之 $q_nu_n+q_{n-1}u_{n-1}+\cdots+q_1u_1+q_0u_0$ 不一定是F一系之一數，因爲如取連續二數 $q_{i-1}=q_{i-2}=1$ 則 $q_{i-1}u_{i-1}+q_{i-2}u_{i-2}+\cdots+q_0u_0\ge u_{i-1}+u_{i-2}=u_i$ 此與(3)式不合。但若取$1=q_n$，q_{n-1}，$q_{n-2}\cdots q_1$，$q_0\in\{0,1\}$且連續二項不同取1，則F一系中任一數M恒可表爲 $q_nu_n+q_{n-1}u_{n-1}+\cdots+q_1u_1+q_0u_0$。

$\because 1\le i\le n+1$且$i>j$時$u_i>u_j$ $\therefore q_{i-1}u_{i-1}+\cdots+q_1u_1+q_0u_0\le u_{i-1}+u_{i-3}+u_{i-5}+\cdots+u_k$
當 i 爲奇數時，取 $k=0$，$u_{i-1}+u_{i-3}+u_{i-5}+\cdots+u_0=(u_i-u_{i-2})+(u_{i-2}-u_{i-4})+(u_{i-4}-u_{i-6})+\cdots+(u_3-u_1)+u_0=u_i-u_1+u_0=u_i-2+1=u_i-1$當$i$爲偶數時，取$k=1$，$u_{i-1}+u_{i-3}+u_{i-5}+\cdots+u_3+u_1=(u_i-u_{i-2})+(u_{i-2}-u_{i-4})+\cdots+(u_2-u_0)=u_i-u_0=u_i-1$

∴恒有 $q_{i-1}u_{i-1}+q_{i-2}u_{i-2}+\cdots+q_0u_0\le u_i-1<u_i$ 而與(3)符合

$\therefore$ $q_nu_n+q_{n-1}u_{n-1}+\cdots+q_0u_0$爲F一系之和表示法。

於F一系中自1到10之和表示如下：

		縮寫
$1=$	1	1
$2=$	2	10
$3=$	3	100

4 =		3	+ 1	101
5 =		5		1000
6 =		5	+ 1	1001
7 =		5	+ 2	1010
8 =	8			10000
9 =	8		+ 1	10001
10 =	8		+ 2	10010

有關 Fibonacci 數列 $\{u_i\}_{i=0}^{\infty}$ 還有屬下諸性質

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$

(B)若 $\phi=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$

則 $u_n=\dfrac{[\phi^n-(-\phi)^{-n}]+[\phi^{n+1}-(-\phi)^{-n-1}]}{\sqrt5}$

(C) $\sum\limits_{k=0}^{n}u_k=u_{n+2}-2$

(D) $u_n=\sum\limits_{k=0}^{[\frac{n+1}{2}]}\binom{n+1-k}{k}$　其中 $[\dfrac{n+1}{2}]$ 表示不超過 $\dfrac{n+1}{2}$ 的最大整數。

證明：

(A)令 $a_n=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ 則 $a_n=\dfrac{u_n+u_{n-1}}{u_n}<\dfrac{u_n+u_n}{u_n}=2$

且滿足

$a_0=2>a_2=1.6>a_4=1.625>\cdots\cdots>a_{2m}>a_{2m+1}>\cdots\cdots>a_3=1.6>a_1=1.5>0$

$\because \{a_{2k}\}_{k=0}^{\infty}$ 是有下界的減數列，$\{a_{2k+1}\}_{k=0}^{\infty}$ 是有上界的增數列

$\therefore$ 均爲收斂數列。設 $\lim\limits_{m\to\infty}a_{2m}=\alpha$，

$\lim\limits_{m\to\infty}a_{2m+1}=\beta$

$\because a_{2m}=\dfrac{u_{2m+1}}{u_{2m}}=\dfrac{u_{2m}+u_{2m-1}}{u_{2m}}=1+\dfrac{1}{\frac{u_{2m}}{u_{2m-1}}}$

$=1+\dfrac{1}{a_{2m-1}}$

兩邊取極限得 $\alpha=1+\dfrac{1}{\beta}$，即 $\alpha\beta=\beta+1$ (1)

同理 $a_{2m+1}=\dfrac{u_{2m+2}}{u_{2m+1}}=1+\dfrac{1}{a_{2m}}$ 取極限後得

$\alpha\beta=\alpha+1$ (2)

由(1)(2)知 $\alpha=\beta$ 故數列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是收斂數列。

今設 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\alpha$

$\because a_n=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{u_{n+2}-u_n}{u_n}=\dfrac{u_{n+2}}{u_n}-1$

$=\dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}}\cdot\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-1=a_{n+1}\cdot a_n-1$

$\therefore \alpha=\alpha^2-1$　$\therefore \alpha=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$

(B)令 $u_{n+2}-\alpha u_{n+1}=\beta(u_{n+1}-\alpha u_n)$

$\because u_{n+2}-u_{n-1}-u_n=0$

$\therefore \alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$

$\Rightarrow(\alpha,\beta)=(\dfrac{1\pm\sqrt5}{2},\dfrac{1\mp\sqrt5}{2})$

$\because u_2-\alpha u_1=\beta(u_1-\alpha u_0)=\beta(2-\alpha)$

$=\beta(1+\beta)$

$u_3-\alpha u_2=\beta(u_2-\alpha u_1)=\beta^2(1+\beta)$

$u_4-\alpha u_3=\beta(u_3-\alpha u_2)=\beta^3(1+\beta)$

$\vdots$

$u_n-\alpha u_{n-1}=\beta(u_{n-1}-\alpha u_{n-2})$

$=\beta^{n-1}(1+\beta)$，同理

$u_n-\beta u_{n-1}=\alpha^{n-1}(1+\alpha)$

由此得 $u_n=\dfrac{\beta^n(1+\beta)-\alpha^n(1+\alpha)}{\beta-\alpha}$

$=\dfrac{(\alpha^n-\beta^n)+(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})}{\alpha-\beta}$

若取 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt5}{2}=\phi$，則 $\beta=\dfrac{1-\sqrt5}{2}$

$= -\phi^{-1}$，故 $u_n = \dfrac{[\phi^n - (-\phi)^{-n}] + [\phi^{n+1} - (-\phi)^{-n-1}]}{\sqrt{5}}$

同理若取 $\beta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$，$\alpha = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ $= -\phi^{-1}$ 也得相同結果

(C) ∵ $u_{n+2} = u_n + u_{n+1} = u_n + u_{n-1} + u_n$

$$= u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-1} = \cdots\cdots$$

$$= u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_2 + u_1 + u_0 + u_1 = \sum_{k=0}^{n} u_k + 2$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+2} - 2$$

(D) $u_0 = 1$

$$u_1 = 2 = 1 + 1 = \binom{2}{0} + \binom{1}{1}$$

$$u_2 = u_0 + u_1 = 3 = 1 + 2 = \binom{3}{0} + \binom{2}{1}$$

$$u_3 = u_1 + u_2 = \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2}$$

$$u_4 = u_2 + u_3 = \binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2}$$

$$u_5 = u_3 + u_4 = \binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3}$$

$$u_6 = u_4 + u_5 = \binom{7}{0} + \binom{6}{1} + \binom{5}{2} + \binom{4}{3}$$

今用數學歸納法作如下證明：

設 n 是小於 k 的自然數時，命題成立

(i)當 $k = 2p$ 時，則

$$\begin{cases} u_{k-1} = u_{2p-1} = \binom{2p}{0} + \binom{2p-1}{1} + \binom{2p-2}{2} + \cdots + \binom{p+1}{p-1} + \binom{p}{p} \\ u_{k-2} = u_{2p-2} = \binom{2p-1}{0} + \binom{2p-2}{1} + \cdots + \binom{p}{p-1} \end{cases}$$

$$\therefore u_k = u_{k-1} + u_{k-2} = \binom{2p+1}{0} + \binom{2p}{1} + \binom{2p-1}{2} + \cdots + \binom{p+2}{p-1} + \binom{p+1}{p}$$

∴ $n = k$ 時命題成立。

(ii)當 $k = 2p-1$ 時，則

$$\begin{cases} u_{k-1} = u_{2p-2} = \binom{2p-1}{0} + \binom{2p-2}{1} + \cdots + \binom{p+1}{p-2} + \binom{p}{p-1} \\ u_{k-2} = u_{2p-3} = \binom{2p-2}{0} + \binom{2p-3}{1} + \cdots + \binom{p}{p-2} + \binom{p-1}{p-1} \end{cases}$$

$$\therefore u_k = u_{k-1} + u_{k-2} = \binom{2p}{0} + \binom{2p-1}{1} + \cdots + \binom{p+1}{p-1} + \binom{p}{p}$$

∴當 $n = k$ 時命題成立

綜上所述，依第二種數學歸納法，本題即得證。

註：若 Fibonacci 數列定義爲 $u_1 = u_2 = 1$，$u_i = u_{i-1} + u_{i-2}$（$i \geq 3$）則上述(B)、(C)、(D)分別改爲

(B′) $u_n = \dfrac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}$

(C′) $\sum_{k=1}^{n} u_k = u_{n+2} - 1$，

(D′) $u_n = \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n-1-k}{k}$

茲舉數例說明非十進位的計算：

（例一）試證介於 0 與 1 之間的有理數 $\dfrac{p}{q}$ 恆可表爲

$$\frac{p}{q} = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} + \cdots$$

其中 $a_i = 0$ 或 1 且唯一確定，a 可爲有

限項或無限項

(證明) $\because 0<\frac{p}{q}<1$，$\therefore 0<2\cdot\frac{p}{q}<2$，取

$2\cdot\frac{p}{q}=a_1+\frac{p_1}{q_1}$，其中 $a_1=0$ 或 1，

$0<\frac{p_1}{q_1}<1$，$\therefore \frac{p}{q}=\frac{a_1}{2}+\frac{1}{2}(\frac{p_1}{q_1})$

同理存在 $a_2=0$ 或 1 使 $\frac{p_1}{q_1}=\frac{a_2}{2}+\frac{1}{2}(\frac{p_2}{q_2})$，

$0\leq\frac{p_2}{q_2}<1$

$\therefore \frac{p}{q}=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{1}{2^2}(\frac{p_2}{q_2})$，依此類推，即得

$$\frac{p}{q}=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}+\cdots$$

(例二)(i)設一自然數 $a=\langle 144\rangle_{五}=\langle x\rangle_{二}=\langle y\rangle_{八}$ 求 $x=$？ $y=$？

(ii)以ⓐ2 ⓑ8 爲底，將 $\frac{2}{3}$ 表爲小數形式

(iii)設 $x=\langle 11.01001\rangle_{二}$ 試以十進位表示 x。

(iv)設 t 與 e 分別表示底爲12時的第十位與第十一位數字，若 $\langle 5110\rangle_{十}=\langle x\rangle_{十二}$ 求 $x=$？

(解)(i) $a=\langle 144\rangle_{五}=1\times5^2+4\times5+4\times5^0$
$=49=1\times2^5+1\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+0\times2^1+1\times2^0=\langle 11001\rangle_{二}=6\times8+1\times8^0=\langle 61\rangle_{八}$ $\therefore x=110001$；$y=61$

(ii)(a) $\because \frac{2}{3}\times2=1+\frac{1}{3}$，$\therefore \frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$

$\because \frac{1}{3}\times2=0+\frac{2}{3}$，

$\therefore \frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\frac{0}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3})$

$=\frac{1}{2}+\frac{0}{2^2}+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{2}{3}$

$=\frac{1}{2}+\frac{0}{2^2}+\frac{1}{2^2}[\frac{1}{2}+\frac{0}{2^2}+\frac{1}{2^2}、\frac{2}{3}]$

$=\frac{1}{2}+\frac{0}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{0}{2^4}+\frac{1}{2^4}\cdot\frac{2}{3}$

$=\cdots$

$=\langle 0.1010\cdots\rangle_{二}$

(b) $\frac{2}{3}\times8=5+\frac{1}{3}$，$\therefore \frac{2}{3}=5\times\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}\times8=2+\frac{2}{3}$，$\therefore \frac{1}{3}=2\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{2}{3}=5\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{8^2}+\frac{1}{8^2}\times\frac{2}{3}$

$=5\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{8^2}+\frac{1}{8^2}[5\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{8^2}+\frac{1}{8^2}\times\frac{2}{3}]$

$=5\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{8^2}+5\times\frac{1}{8^3}+2\times\frac{1}{8^4}+\frac{1}{8^4}\times\frac{2}{3}=\cdots$

$=\langle 0.5252\cdots\cdots\rangle_{八}$

(iii) $x=2^1+2^0+\frac{0}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{0}{2^3}+\frac{0}{2^4}+\frac{1}{2^5}$

$=3.28125$

(iv) $5110=2\times12^3+11\times12^2+5\times12+10$

$=2\times12^3+e\times12^2+5\times12+t\times12^0=\langle 2e5t\rangle_{十二}$

$\therefore x=2e5t$

(例三)有一無限個方格的棋盤，於方格中依下面規律連續填入數字：左下角填0，其他方格則填同列左邊或同行下面未曾出現的最小非負整數，如圖所示，試問第1000列與第

4	5	6	7	0
3	2	1	0	7
2	3	0	1	6
1	0	3	2	5
0	1	2	3	4

100行交叉處的方格應填入何數？

（解）設A，B是二個非負整數，以2爲底表示爲$A=<a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0>$，$B=<b_n b_{n-1}\cdots b_1 b_0>$ 即$A=a_n\cdot 2^n+a_{n-1}\cdot 2^{n-1}+\cdots+a_1\cdot 2+a_0$，$B=b_n\cdot 2^n+b_{n-1}\cdot 2^{n-1}+\cdots+b_1\cdot 2+b_0$ 其中$a_i, b_i\in\{0, 1\}$且設領導數字a_n, b_n至少有一爲1，定義$A\oplus B=C=<c_n\ c_{n-1}\cdots c_1\ c_0>$，其中當$a_i+b_i$是偶數時取$c_i=0$，當$a_i+b_i$是奇數時取$c_i=1$。如$A=27=<11011>$，$B=13=<01101>$，則$C=<10110>=22$。稱$A\oplus B$爲Nim和，其運算方式是底2之加法，但並不進位。茲述$A\oplus B$之一些性質如下：

①交換性：$A\oplus B=B\oplus A$，由定義可直接導出。

②結合性：$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$，簡記爲$A\oplus B\oplus C$，因爲

設$A=<a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0>$，$B=<b_n b_{n-1}\cdots b_1 b_0>$，$C=<c_n c_{n-1}\cdots c_1 c_0>$

由定義可得$(A\oplus B)\oplus C$與$A\oplus(B\oplus C)$均等於$D=<d_n d_{n-1}\cdots d_1 d_0>$

其中 $d_i=\begin{cases}0 & 當 a_i+b_i+c_i 是偶數時\\ 1 & 當 a_i+b_i+c_i 是奇數時\end{cases}$

③具有$\oplus$之單位元素0：對任一非負整數A恒有$0\oplus A=A\oplus 0=A$。

④反元素：設$A=<a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0>$，因$a_i+a_i=2a_i$對一切$1\leq i\leq n$恒爲偶數 $\therefore A\oplus A=0$，即任一非負整數A是本身之$\oplus$運算反元素。

由①～④知一切非負整數集合S對運算“$\oplus$”成一交換群。

其次證明棋盤中第$A+1$列與第$B+1$行交叉處的方格應填入$A\oplus B$欲達此目的，須證明$A\oplus B$另具有下列特性：

(a) $0\oplus 0=0$，由前述③顯然成立。

(b) $A\oplus B$異於$P\oplus B$（但$P<A$）與$A\oplus Q$（但$Q<B$），因爲

若$A\oplus B=P\oplus B\Rightarrow A\oplus B\oplus B=P\oplus B\oplus B\Rightarrow A=P$，與條件$P<A$不合。

若$A\oplus B=A\oplus Q\Rightarrow A\oplus A\oplus B=A\oplus A\oplus Q\Rightarrow B=Q$，與條件$Q<B$不合。

(c)任意非負的整數$X<A\oplus B$等於某一$P\oplus B$（$P<A$）或$A\oplus Q$（$Q<B$）。因爲：

令$A=<a_n a_{n-1}\cdots a_1 a_0>$，$B=<b_n b_{n-1}\cdots b_1 b_0>$，$A\oplus B=C=<c_n c_{n-1}\cdots c_1 c_0>$

設$X=<x_n x_{n-1}\cdots x_1 x_0>$是任一小於$C$之非負整數，$k$是滿足$c_k\neq x_k$的最大整數

，$\because C>X$ $\therefore c_k=1$，$x_k=0$ $\because c_k=1$

$\therefore a_k=1$，$b_k=0$或$a_k=0$，$b_k=1$ 今設$a_k=1$，$b_k=0$，$\because b_k+x_k=0<1=b_k+c_k$，$b_i+x_i=b_i+c_i$，$n\geq i>k$

且$B\oplus C\geq<b_n+c_n, \cdots, b_{k+1}+c_{k+1}, 1, \underbrace{0, \cdots, 0}_{k個0}>=(b_n+c_n)\cdot 2^n+\cdots\cdots+(b_{k+1}+c_{k+1})\cdot 2^{k+1}+2^k$

$B\oplus X\leq<b_n+c_n, \cdots, b_{k+1}+c_{k+1}, 0, \underbrace{1, \cdots, 1}_{k個1}>=(b_n+c_n)\cdot 2^n+\cdots\cdots+(b_{k+1}+c_{k+1})\cdot 2^{k+1}+2^{k-1}+2^{k-2}+\cdots+2^1+2^0$

$\because 2^{k-1}+2^{k-2}+\cdots+2^1+2^0=2^k-1<2^k$

$\therefore B\oplus X<B\oplus C=B\oplus B\oplus A=A$，令$P=B\oplus X$，則$P\oplus B=B\oplus B\oplus X=X$故已予數$X$是等於$P\oplus B$其中$P<A$。同理當$a_k=0$，$b_k=1$時，$a_k+x_k=0<1=a_k+c_k$ $\therefore Q=A\oplus X<A\oplus C=A\oplus A\oplus B=B$且$Q\oplus A=A\oplus A\oplus X=X<B\oplus A$。故已予數$X$是等於$Q\oplus A$，其中$Q<B$，由上面(a)(b)(c)即得知

：棋盤中第 $A+1$ 列與第 $B+1$ 行之交叉處應塡 $A\oplus B$，今 $A=999=\langle 1111100111\rangle_2$，$B=99=\langle 1100011\rangle_2$ 故第 1000 列第 100 行交叉處應塡入 $A\oplus B=999\oplus 99=\langle 1110000100\rangle_2=900$。

（註）(i)由性質④知棋盤之方格自左下角向右上方延伸的對角綫一律塡0。

(ii)由性質①知所塡數字，對稱於(i)之對角綫。

例四：Nim遊戲：甲乙二人自三堆火柴做取火柴的遊戲，規定自某一堆隨意取出數枝（至少一枝），取得最後一枝者爲勝。今甲先乙後，試決定甲能獲勝時最初三堆火柴數的情形及能致勝之取法。

（解）設三堆火柴最初各有 a,b,c 枝，且以2爲底表示如下：

$$a=a_m2^m+a_{m-1}2^{m-1}+\cdots+a_12+a_0=\langle a_ma_{m-1}\cdots a_1a_0\rangle_2$$

$$b=b_m2^m+b_{m-1}2^{m-1}+\cdots+b_12+b_0=\langle b_mb_{m-1}\cdots b_1b_0\rangle$$

$$c=c_m2^m+c_{m-1}2^{m-1}+\cdots+c_12+c_0=\langle c_mc_{m-1}\cdots c_1c_0\rangle_2$$

其中 $a_i,b_i,c_i\in\{0,1\}$。爲方便起見，取 a,b,c 之位數均爲 $m+1$位，且領導數字 a_m,b_m,c_m 至少有一爲1，但不一定全爲1。當某人自某堆隨意取出數枝火柴後，恰變更 a,b,c 三數之一爲較小之數且至少改變該數之諸數位之一，譬如取自第一堆（含 a 枝者）時，則他至少改變 $a_0,a_1,\cdots,a_{m-1}$，a_m之一，此種改變將偶數變爲奇數（即變0爲1），奇數變爲偶數（即變1爲0）。如：若 $a=5=\langle 101\rangle_2$ 取出3枝後剩下 $2=\langle 010\rangle_2$，如此取法將 $a_2=1$ 改爲0，$a_1=0$ 改爲1，$a_0=1$ 改爲0。考慮下列諸和

$a_m+b_m+c_m$，$a_{m-1}+b_{m-1}+c_{m-1}$，………$a_1+b_1+c_1$，$a_0+b_0+c_0$ ①

如①式至少有一項爲奇數，則不論對手乙如何取法，只要甲不失誤的話，他必贏得該遊戲。譬如第一奇數項是 $a_k+b_k+c_k$，則 a_k，b_k，c_k中至少有一數爲1爲便利計，取 $a_k=1$。若甲自第一堆取出適當數枝使 a_m，$a_{m-1}\cdots a_{k+1}$ 諸值不變，a_{k-1}，$a_{k-2}\cdots a_1a_0$ 可取任意值且 a_k 由1改爲0，適合此條件之數必小於 a；因此可自 a 減去適當數而得。特別情形，若甲取適當數枝後且使 $a_k+b_k+c_k$，$a_{k-1}+b_{k-1}+c_{k-1}$，$\cdots a_1+b_1+c_1$，$a_0+b_0+c_0$ 諸項均爲偶數（不論其中原先是否已有偶數），如此①式諸項均變爲偶數，譬如 $a=13=\langle 01101\rangle_2$，$b=27=\langle 11011\rangle_2$，$c=19=\langle 10011\rangle$

$a_4+b_4+c_4=2$，$a_3+b_3+c_3=2$，$a_2+b_2+c_2=1$，$a_1+b_1+c_1=2$，$a_0+b_0+c_0=3$ ①'

此時 $k=2$，甲自第一堆取出5枝使 a 減爲 $8=\langle 01000\rangle_2$ 枝，而①'式諸項全爲偶數項2，2，0，2，2。甲留給乙的全爲偶數項，當乙自某堆取完後至少改變諸偶數項之一爲奇數，因此甲又得有奇數之項！他可仿前述方式將它改爲全偶數項；如此繼續，火柴數逐漸減少，當全部被取光時（0爲偶數），甲便取得最後一枝而獲勝。假如最初①式全爲偶數，則甲不一定能獲勝，當乙仿上述方式毫無差錯取火柴時，甲註定失敗，如乙略有失誤時，甲便可採用上述方法而獲勝。

（註一）利用例三的Nim和，致勝策略可說明如下：若三堆火柴數的Nim和不是0（即①式中至少有一爲奇數），您可取出適當火柴數使得剩餘火柴數之Nim 和爲0，此時不管您的對手如何取法，留給您的火柴

數之Nim和必不爲0，如此繼續進行，對方常處於Nim和爲0的不利情況，而您必取得最後一枝獲勝該遊戲。

（註二）若火柴堆有 n 堆，$a^{(t)}$ 表示第 t 堆之火柴數且

$$a^{(t)}=a_m^{(t)}2^m+a_{m-1}^{(t)}2^{m-1}+\cdots+a_1^{(t)}2+a_0^{(t)}=\langle a_m^{(t)}a_{m-1}^{(t)}\cdots a_1^{(t)}a_0^{(t)}\rangle$$

$t=1,2,\cdots n$

若 $a_m^{(1)}+a_m^{(2)}+\cdots+a_m^{(n)}$，$a_{m-1}^{(1)}+a_{m-1}^{(2)}+\cdots+a_{m-1}^{(n)}$，$\cdots$ $a_1^{(1)}+a_1^{(2)}+\cdots+a_1^{(n)}$，$a_0^{(1)}+a_0^{(2)}+\cdots+a_0^{(n)}$

不全爲偶數，則如 $n=3$ 時一樣，首先取火柴者只要依上述方法必贏得此遊戲。

例五：使用一架天秤去稱1至40磅等40種不同重量的物品時，如何用最少數的砝碼去稱?

（解）我們將說明只要用1，3，9和27磅的砝碼就夠用。

以3爲底的三進位數系經略修正後，可用0，1，−1代替0，1，2當做係數。如

$11=1\cdot3^2+0\cdot3+2$ 可寫爲 $11=1\cdot3^2+1\cdot3-1$

$8=0\cdot3^2+2\cdot3+2$ 可寫爲 $8=1\cdot3^2+0\cdot3-1$

顯然地，將係數2改爲−1時，只要將其左方一項的係數加1即可；若增加後，該係數變爲3時，便代以0且將其左方一項的係數再加1。同時自1至40的整數皆可用四位數的三進位數表示且使用的係數爲0，1，−1，即

$a\in N$，$1\le a\le 40$　$a=a_3\cdot3^3+a_2\cdot3^2+a_1\cdot3+a_0$ 其中 $a_i\in\{0,1,-1\}$

例如 $38=1\cdot3^3+1\cdot3^2+0\cdot3+2=1\cdot3^3+1\cdot3^2+1\cdot3-1$。由此可推得如下結論：若有一架天秤，只需要使用1，3，9和27磅等四種砝碼各一個便能稱1至40磅等40種不同重量的物品，但砝碼不限制只放在天秤的一邊。例如稱38磅時，由前面38的展開即知：只要在一盤內放27，9，3磅的砝碼各一個另一盤則加放一個一磅的砝碼。同理任何其他自1至40磅之間的重量都可如此稱得。

例六：「十二枚硬幣問題

設有外形相同的硬幣12枚，已知其中有1枚是假的，過重或過輕有待決定，唯一可利用的是一架天秤，但沒有砝碼，今限用它稱三次，便要找出那枚假硬幣並說出它是過重或是過輕，問該如何稱法？

（解）由於沒有砝碼，天秤能做的就只是將每個硬幣的重量相互比較一下。在天秤兩邊的盤內各放六個硬幣，則必有一邊下降，另一邊上昇。原因可能是下降的一邊有個過重的硬幣，但也可能由於上昇的一邊有個過輕的硬幣，故此種稱法得不到結果。

讓我們嚐試改進一下，分成 A，B，C 三組來稱，每組各含4枚硬幣。如果將 A 與 B 重量相比，B 與 C 重量相比，則兩組中總有一組不會平衡的，由於問題中僅有一枚硬幣是假的，故 A，B，C 三組中有兩組完全由眞硬幣組成，此兩組重量必相等。設 A 與 B 平衡，則假硬幣必在 C 組中，又若 B 比 C 重則此枚假硬幣爲過輕，否則過重，同理設 B 與 C 平衡，同樣地可決定 A 組中那枚假硬幣的過輕或過重，若 A 與 B，B 與 C 均不平衡，則假硬幣便在 B 組中。因此，我們知道稱兩次便可決定假硬幣過重抑是過輕，且將它的可能性縮小爲4枚中決定1枚。但如何再稱一次就完全找出這枚假硬幣呢？若我們能稱四次，事情就好辦多了！可是問題是我們只能稱三次。

我們的解法將利用到數的三進位表示法。將 $\langle a_2a_1a_0\rangle$ 縮寫爲 $a_2a_1a_0$，則1至12可寫成

1 = 001	7 = 021
2 = 002	8 = 022
3 = 010	9 = 100
4 = 011	10 = 101
5 = 012	11 = 102
6 = 020	12 = 110

現在開始解決12枚硬幣問題，首先將每個硬

幣貼上一張標籤，每張標籤分別編上1至12，且寫上兩個三進位數，第一個數是硬幣的編號數，第二個數則由前數略加修改而得：2改爲0，1不變，0改爲2，例如編號爲2的硬幣標籤上寫的是002和220。一個三進位數由左至右第一次數字變化可能爲0變1，或1變2或2變0如001,011,112,201等數稱爲「順時針三位進位數」；若第一次數字變化是1變0，或0變2或2變1如020，021，110等數稱爲「逆時針三進位數」。每個硬幣上的標籤各有一順時針三進位數和一逆時針三進位數。下面是1至12 的兩種三進位表示法，註有“＊”號表示逆時針三進位數:

1＝001＝221＊	7＝021＊＝201
2＝002＊＝220	8＝022＊＝200
3＝010＝212＊	9＝100＊＝122
4＝011＝211＊	10＝101＊＝121
5＝012＝210＊	11＝102＊＝120
6＝020＊＝202	12＝110＊＝112

以下討論的依據是：上列24 個三進位數各對應於一定的硬幣，且每個硬幣的兩個三進位數是唯一的（一順時針，另一逆時針）。例如在討論中出現了三進位數201，我們立即可斷定它爲7的順時針三進位數。

現在每個硬幣都已用三進位數來標示，便可開始研究如何在三次內稱出那枚假硬幣並說出它是過輕或過重。我們將用一種稱法迫使那枚假硬幣自動亮出它的三進位標示數，每次稱以前，先要將十二枝硬幣分爲適當的三組。

第一稱：將順時針標示數首字爲0的硬幣劃分爲第一組，稱爲$C(1,0)$，故$C(1,0)$包括1,3,4,5號硬幣。首字爲1的硬幣爲第二組稱爲$C(1,1)$，包括9,10,11,12號硬幣。首字爲2的硬幣爲第三組稱爲$C(1,2)$，包括2,6,7,8號硬幣。將$C(1,0)$放在天秤左邊的盤內，$C(1,2)$放在右邊的盤內，稱的結果，若右盤下降就記出2，左盤下降就記出0，若兩邊平衡則記1，這個數便是那枚假硬幣三進位數的首字。

第二稱：再將12 枚硬幣按其順時針標示數中第二個數字分爲三組

$C(2,0)$包括1,6,7,8號硬幣

$C(2,1)$包括3,4,5,12號硬幣

$C(2,2)$包括2,9,10,11 號硬幣

同樣地將$C(2,0)$放在左邊，$C(2,2)$放在右邊，仿第一稱方法得到那枚假硬幣三進位標示數的第二個數字。

第三稱：按順時針標示數中第三個數字分爲三組

$C(3,0)$包括2,3,8,11 號硬幣

$C(3,1)$包括1,4,7,10 號硬幣

$C(3,2)$包括5,6,9,12 號硬幣

將$C(3,0)$放在左邊，$C(3,2)$放在右邊，仿第一稱方法得到那枚假硬幣三進位標示數中第三個數字。

此時答案業已揭曉，三次稱所得三個數字構成一三進位數，標示那枚假硬幣。若所得的三進位數是順時針標示數，則假硬幣過重，若爲逆時針標示數則過輕。茲擧一實例說明上述稱法：設7號爲過重的假硬幣稱第一次時，7號硬幣在$C(1,2)$中，故其首字爲2。稱第二次時，7號硬幣在$C(2,0)$中，故其第二數字爲0，稱第三次時，7號硬幣在$C(3,1)$中，不在天秤的任一盤上，天秤左右平衡，故第三數字爲1。因此得三進位標示數爲201這是一個順時針標示數，其對應之逆時針標示數爲021，正是7化爲三進位數的寫法。

參考資料

①A.M.Yaglom and I.M.Yaglom: Challenging Mathematical problems with elementary solutions volume 2 P.13

②Murray R.Spiegel：Advanced Calculus P.19

③Dan Pedoe著：The Gentle Art of Mathematics P.25

邵 重 鋼譯：（數學的藝術）

④王 懷 權 ：代數學發展史 P.81