由「直觀經驗」入門的數學科教學

簡蒼調
臺中師專

數學邏輯演繹不是基礎數學教學的主要方法，雖然直覺經驗方法不完全可靠，而需要演繹的證明；但是演繹嚴密的要求程度我們認爲應配合學生的數學心智發展，因爲邏輯嚴密的能力是與學生學習數學的智齡有關。對數學敍述的認識及討論有不明或疑惑時，演繹證明才顯得有意義。在演繹法教學之前應有直觀經驗法爲其入手，因爲它將有助於學生直接抓住觀念及證明的思路與方法。

如同“理論幾何學”之前，必先經過“直觀經驗幾何”的學習階段。幾何學的性質多是從我們周圍的世界裡抽象而得；人們需要先作過不計其數的直線，然後才能把“過任意兩相異點恰可決定一直線”作爲公理(axiom)；人們也將不同的物體移動翻轉，再把一個物體加疊在另外一個物體上面，像這樣不知重覆了多少次，才由直觀經驗到幾何圖形的全等及對稱的觀念。進而利用這種觀念去證明定理，例如：大家所熟悉的三角形全等定理就是這樣證明的。

直觀實驗並非靜止不前，經驗能使它精進，何況在未有適當之基礎前，學生欲接受某一種新的觀念，直觀經驗法乃爲最佳入門。下面我們將列擧三個例子來顯示由直觀經驗法爲其入門的教學與其價值。

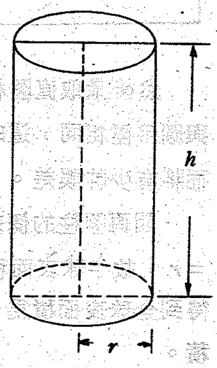
一、球面積求法之教學

目前國小國中數學教材中，均無「球表面積求法」之教學，可能是講授或學習有困難的緣故。但是我們認爲球面積的求法在這階段，實有學習之必要與價值。事實上，國小國中階段有關「數」、「量」、「形」的教學均着重於採用直觀實驗的啓發式教學。此處，將介紹由直觀實驗法、極限法到分析法，三段逐層教學。

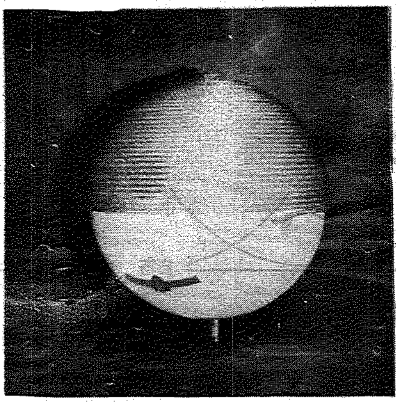
I. 直觀實驗法

國小高年級學生，已認識圓柱體及其表面積的求法。設圓柱體的底半徑爲 r，高爲 h，（如圖一）則其側表面積爲 $2\pi r\times h$，其中 π 爲圓周率，通常取有理近似值 3.14。

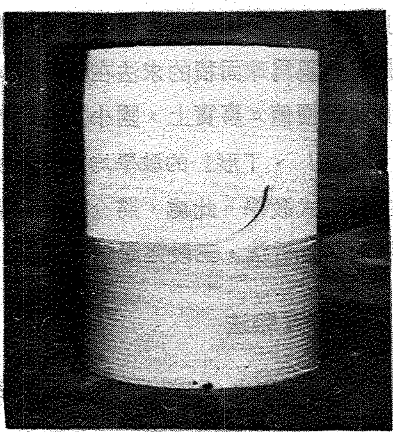
如圖(二)，使用足夠長的細繩，自球上一點，開始緊密繞滿半球（或繞滿全球），捨棄剩餘細繩。再用這條相同長度的細繩，相同的密度來繞事先設計或選取半徑與球半徑相同的直圓柱，由下底往上繞完這條細繩，（如圖三）。



（圖一）



（圖二）



（圖三）

然後量取直圓柱面上繞繩之高度，此高度實與圓半徑相同，這時教師應說明，由於操作不同而將有少許誤差。

因直圓柱的側表面積為“$2\pi r\times h$”，又$h=r$，故半球表面積為“$2\pi r^2$”，從此直觀實驗得到全球表面積為“$4\pi r^2$”。即四倍的大圓面積。

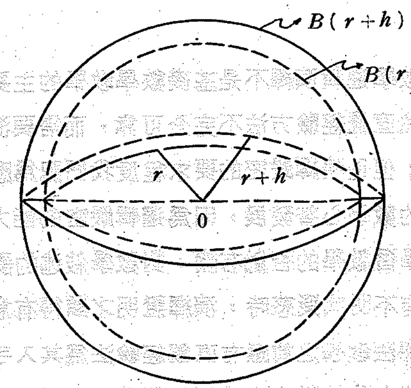
數學教師可試用上面過程作活動設計教學，讓學生由實際操作中學習。

Ⅱ．極限法

對於略有極限概念者，可以採用極限觀念來求「球的表面積」。

設以r及$r+h$為半徑的兩同心球，令：$B(r+h)$表以O為球心，$r+h$為半徑的球體。

以$B(r)$表以O為球心，r為半徑的球體，再令：V為$B(r+h)$去掉$B(r)$後的立體體積（球殼）（如圖四）。



（圖四）

設S為$B(r)$的表面積，則在h很小時，$S\times h$無限接近於V。即當$h\to O$時，$V/h\to S$其中

$$V=\frac{4}{3}\pi〔(r+h)^3-r^3〕=\frac{4}{3}\pi〔3r^2h+3rh^2+h^3〕$$

所以$V/h=4\pi r^2+4\pi rh+\frac{4}{3}\pi h^2$

當$h\to O$則$V/h\to 4\pi r^2$

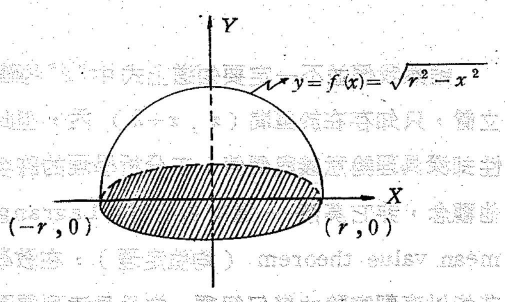
即$S=4\pi r^2$

雖然這種觀念尚屬粗略，但已較Ⅰ直觀實驗法為深入。

Ⅲ、分析法

對於具備有分析基礎者，可用下列之分析法。

依據「將一平面曲線C繞一固定直線旋轉，所形成之曲面之面積」之求法來教學。



(圖五)

設 f 爲在閉區間〔a，b〕內可微分函數，f' 爲連續函數。

當 $x\in$〔a，b〕，$f(x)\geq 0$，則 f 之圖形介於點（a，$f(a)$）與（b，$f(b)$）間之曲線弧，繞 x 軸旋轉，所形成之曲面面積之求法如下：

令 $\triangle x=\dfrac{b-a}{h}$ 及 $x_i=a+i\triangle x$

（$i=1，2，3，\cdots\cdots\cdots\cdots，n$）

則順次以直線段聯接各點（$x_0,f(x_0)$),(x_1，$f(x_1)$)，……，（$x_n,f(x_n)$）。將任意兩點（x_{i-1}，$f(x_{i-1})$）與（$x_i,f(x_i)$）間之直線段長：

$$\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+〔f(x_i)-f(x_{i-1})〕^2}$$

由均值定理（Mean value Theorem）知

$$f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(t_i)(x_i-x_{i-1})$$

$$t_i\in〔x_{i-1},x_i〕$$

故線段長爲 $\sqrt{1+〔f'(t_i)〕^2}\cdot\triangle x$

則此小線段繞 x 軸旋轉所形成之曲面爲圓錐體之側面。其兩底半徑分別爲 $f(x_i)$ 及 $f(x_{i-1})$，其側表面積爲：

$$2\pi\cdot\left(\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\right)\cdot\sqrt{1+〔f'(t_i)〕^2}\cdot\triangle x$$

則總表面積

$$\sum_{i=1}^{n}\pi(f(x_{i-1})+f(x_i))\cdot\sqrt{1+〔f'(t_i)〕^2}\cdot\triangle x$$

$$=\sum_{i=1}^{n}2\pi f(z_i)\sqrt{1+〔f'(t_i)〕^2}\cdot\triangle x$$

z_i 爲（x_{i-1},x_i）之中點

故表面積

$$S=\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}2\pi f(z_i)\sqrt{1+〔f'(t_i)〕^2}\cdot\triangle x$$

$$=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+〔f'(x)〕^2}dx\cdots\cdots\cdots\text{※}$$

現在讓我們用※公式來求球表面積：如圖五

令：函數 $y=f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(r^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)$$

$$=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

則球表面積 $S=2\pi r\int_{-r}^{r}dx$

$$=2\pi rx\Big|_{-r}^{r}$$

$$=2\pi r(r+r)$$

$$=4\pi r^2$$

二、分數值變化之教學

(I)　直觀經驗入手

本例我們仍以「直觀經驗法」入手再進入「證實」階段及最後「應用」的一層。首由實際數字的分數，來引導學生具體認識：

眞分數值的性質，如 $\dfrac{2}{3}<\dfrac{2+1}{3+1}=\dfrac{3}{4}$

假分數值的性質，如 $\dfrac{3}{2}>\dfrac{3+1}{2+1}=\dfrac{4}{3}$

即在眞分數中，分子、分母各加 1，或各加同樣異於 0 的整數，則其結果的分數值變大。反之，在假分數中分子、分母各加 1，或各加同樣異於 0 的整數，則其結果的分數值變小。於國民教育階段僅作以上「具體認識」的教學。當學生推理思想因經驗而成熟，同時懷疑自會產生，這時候若不進入下面「證實階段」的教學，則難以滿足學生的欲望。

(II)　證實

由有理數之“次序定理”知道：

$$ad<bc\Longleftrightarrow\frac{a}{b}<\frac{c}{d}\quad(bd>0)$$

今設 $\dfrac{a}{b}\in Q$，其中 $a<b$，$a,b\in Z$，$b\neq 0$.

因爲 $b(a+1)-a(b+1)=b-a>0$

$\Rightarrow b(a+1)>a(b+1)$

故 $\dfrac{a+1}{b+1}>\dfrac{a}{b}$

同理可證 $\dfrac{a}{b}\in Q$，$a>b\Rightarrow\dfrac{a+1}{b+1}<\dfrac{a}{b}$

這時，由直觀經驗得來的事實已有一般性的證實。若能再深入的應用，則可刺激學生學習的興趣。

（III） 應用

設 $\pi(m)$ 表不大於 n 之質數個數（尤拉符號）則

(1) 若 n 爲質數，則 $\pi(n)=\pi(n-1)+1$

$$\Rightarrow \pi(n) > \pi(n-1)$$

故 $\dfrac{\pi(n-1)}{n-1}=\dfrac{\pi(n)-1}{n-1}<\dfrac{\pi(n)}{n}$，

（分子分母各加1）

(2) 若 n 不爲質數，則 $\pi(n)=\pi(n-1)$

$$\Rightarrow \frac{\pi(n)}{n}<\frac{\pi(n-1)}{n-1}$$

三、「均值定理」(Mean value theorem) 的教學

直觀經驗法並不限於國民教育階段，在大專以上數學教學，如能在作嚴謹論證之前，對某一觀念若能先作直觀實驗，亦常較易於收到預期學習目標。如教學 $\dfrac{d}{dx}X^n=nx^{n-1}$，可從 $n=2$ 和 $n=3$ 的特例中，逐漸認識起來。又解析幾何學上水平切線的斜率，亦可由物理觀點表現直覺的例子，把導數看成瞬時速度，就變得有意義多了。而且球往上扔在最高可看到的速度爲零。從此，告訴我們函數在最大值時，導數爲零，即水平的線斜率爲零。

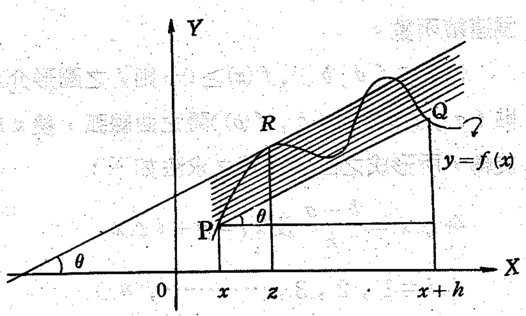
在函數之微分而言，在始點處的微分，表示此函數在該點增量的近似值，係以始點處自變數的增量與函數之導數表示之，即

$$f(x+h)-f(x)\approx f'(x)h$$

如果我們選自（x，$x+h$）區間內某數的適當導數，代換始點 x 之導數 $f'(x)$，則可以得到這種形式的恰當方程式，即

$$(\exists z\in(x,x+h))(f(x+h)-f(x)=f'(z)h)$$

雖然我們並不一定要知道上式中"z"的確定位置，只知存在於區間（x，$x+h$）內，但此特性却深具理論意義與價值，在分析學理的許多其他觀念，非它莫解——這就是所謂的Lagrange's mean value theorem（均值定理），在教學時若能以直觀實驗的幾何解釋，當最易達到學習效果。



在圖中 $P(x,f(x))$，$Q(x+h,f(x+h))$ 連接 $\overline{PQ}$ 則得斜角 θ，而斜率

$$m=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

當我們平行地上下移動 $\overleftrightarrow{AB}$，則將有切函數圖形於 R 之切線。

設其中 R 之對應坐標爲（z，$f(z)$），此切線之斜角仍爲 θ，其斜率

$$m=\tan\theta=f'(z)$$

故得Lagrange formular

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(z)$$

當然，這僅是直觀實驗概念的認識，絕非嚴謹證明；不過這對於一般非專攻數學的讀者已是足夠。對專攻數學者而言，能先給予概念之認識，，在教學上之重要性是無可置疑的。

最後我們想藉此建議未來的國小、國中的數學教材能增列本文中第㈠例"球面積求法"的直觀實驗部分，並於各類數學教材之擬編時能顯示"直觀經驗法"入門的價值。