有關 $ax+by=1$ 之整數解

薛昭雄

國立政治大學

$ax+by=1$，a，b為整數（a，b）$=1$ 之整數解一向是高中數學之重點之一，亦為大專聯考命題常為出現之題目。本文的目的在為提供另一種方向的處理，以為高中老師教學時之參考。

令 n 為正整數及 $1\leq k\leq n$，所有最簡眞分數 h/k 並以它們的大小排列成非遞減（non-decreasing）次序組成的數列 F_n 就稱為 n 級的 Farey 數列（Farey sequence of ordern）。

例1　F_5 就是

$$\frac{0}{1},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{1}{1}.$$

在 F_n 中的每一個項（term）都稱為 Farey 分數（fraction），我們需要注意的是每個有理數 $\frac{m}{n}$（此處 $0\leq\frac{m}{n}\leq 1$）都是 Farey 分數。

定理（Farey-Cauchy）令 F_n 為 Farey 數列，l/m 為 h/k 的後一項（Immediate successor），則 $kl-hm=1$.

證明：設 $1\leq N\leq 5$，則此定理易證。

我們假設 F_N 時為眞，欲證 F_{N+1} 為眞

令 $\frac{a}{b}$ 為最簡眞分數，它並不屬於 F_N，則 $b\geq N+1$，且 $\frac{h}{k}\leq\frac{a}{b}\leq\frac{l}{m}$，此處 $\frac{l}{m}$ 與 $\frac{h}{k}$ 為 F_N 中的項，規定整數 λ 與 u 如下：

$$\lambda=Ka-hb\qquad u=bl-am.$$

由此可知 $\lambda\geq 0$　$u\geq 0$ 與 $\lambda+u>0$ 又因 $kl-hm=1$

故得 $\lambda l+uh=kal-ham=a(kl-hm)=a$

同理，因（a，b）$=1$ 則 $\lambda m+uk=b$ 與（λ，u）$=1$，因此可得下式：

假使 $\frac{h}{k}\leq\frac{a}{b}\leq\frac{l}{m}$，（a，b）$=1$　則

$$\frac{a}{b}=\frac{\lambda l+uh}{\lambda m+uk},\ \lambda\geq 0,\ u\geq 0,$$

$$\lambda+u>0,\ (\lambda,u)=1.$$

反之，若 λ 與 u 為整數，滿足 $\lambda\geq 0$，$u\geq 0$，$\lambda+u>0$,（λ，u）$=1$，又規定 $a=\lambda l+uh$，$b=\lambda m+uk$　則得

$\lambda=ka-hb$，$u=bl-am$ 與（a，b）$=1$，因 $kl-hm=1$

我們則得 $\frac{a}{b}$ 為最簡分數且 $\frac{h}{k}\leq\frac{a}{b}\leq\frac{l}{m}$，因而 $\frac{a}{b}$ 為 F_M 中的一項。

因（λ，u）$=1$，因此我們有三種情況

$\lambda=0$，$u=1$

$\lambda=1$，$u=1$

$\lambda=1$，$u=0$

又因 $b\leq m+k$，故有以下三種情況

$a=h$，$b=k$

$a=l+h$，$b=m+k$

$a=l$，$b=m$

假若 $\lambda=0$，則 $\frac{a}{b}=\frac{(uh)}{(uh)}$ 不是最簡分數（除非 $u=1$），由 $\lambda m+uk=b$ 得 $b=k$

，但這與下式矛盾$b \geq N+1 > k$. 同理可推得$u \neq 0$，因此$b \leq m+k$成立的必要條件為$\lambda = u = 1$.若$b \geq N+1$與$\frac{a}{b} \in F_{N+1}$,則$b = N+1$.

又因$\frac{l+h}{m+k} \notin F_n$，$h/k$與$l/m$為$F_N$ 中的連續二項，故有$m+k \geq N+1$. 由上討論可知如$b = N+1$，即有$\lambda = u = 1$，因此

$$\frac{a}{b} \in F_{N+1} \Rightarrow a = h+l, \ b = k+m,$$

$$\frac{a}{b} = \frac{h+l}{k+m}.$$

因為$kl - hm = 1$，所以$\frac{a}{b}$滿足了此定理，故此定理在F_{N+1} 時成立（我們已先假設 F_N 成立）。

有了以上之定理，我們可證明$ax + by = 1$，$(a, b) = 1$整數解的存在。

令$b > a > 0$與$(a, b) = 1$，則$\frac{a}{b}$為 F_b中之一項，又令$\frac{h}{k}$為$\frac{a}{b}$的前接（最近前一項）分數。由上述定理得$ka - hb = 1$，故$x = k$ 與$y = -h$為$ax + by = 1$，$(a, b) = 1$ 的整數解。

例2　求$2x + 5y = 1$之整數解

解：因$\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$,而在 F_5中$\frac{2}{5}$之前一項為$\frac{1}{3}$

故　$x = 3$　$y = -1$為其整數解

一個問題是：實際計算時，上述之證明方法是否可行，答案是肯定的如同例2所示，但是不是一個有效的方法呢？這可不是一個值得鼓勵的方法。可不可以進一步的簡化呢？這有待於大家的深思了。

質因數之識別

黃來興

——金門安瀾國小——

國小及國中教授到有關整數的質數與合數的問題時，只有說到質因數2、3、5、11等數的識別，但無7、13、17、19、23…等等的識別，因此常有一些數字有2、3、5、11以外的質因數，而無法求得，現提供以下幾個質數之識別法：

一質因數7之識別：如有一數，將這數的末一位數字去掉，把所剩之數減去所去掉的數字的兩倍，按此法繼續演算，如最後所剩之數是零或七的倍數，就有質因數7（如例一）。

二質因數 11 之識別：如書中一種外，還可將末一位去掉，用所剩之數減去所去掉之數，仿此反覆進行，最後若得0或11 的倍數，就有質因數 11（如例二）。

三質因數13 之識別：①將末位數去掉，把所剩之數減去所去掉之數的九倍，仿此繼續做下去，至最後若是0或13 的倍數，就有質因數13（如例三）。②若去掉之數為3、6、9三數，則可用去掉之數除以3，而後用所得的商從去末位數字後所剩之數減去（如例四）。③兩種同時使用亦可。

四質因數 17 的識別法：將末位數字去掉，把所剩之數減去所去掉之數的5倍，仿此繼續下去至最後若為0或17 的倍數，就有質因數 17（如例五）。

五質因數19 的識別法：①將末位數字去掉，把所剩之數減去所去掉之數的 17 倍，仿此繼