數學實驗室與教學活動設計實例

呂溪木　國立臺灣師範大學

壹、數學實驗室

近年來數學教育的一大改進是由「以教師爲中心的灌輸式教學」轉變爲「以學生爲中心的主動學習」。多年來在中小學裏，學生井然有序地靜坐在教室中聆聽教師的演講，在整個過程中以教師爲本位，雖然言者諄諄但是聽者渺渺，造成學生被動地接受知識的現象。程度較好的學生固然可以接受但是缺乏思考與創造力的訓練；程度較差的學生往往因此而喪失學習的興趣甚至於放棄學習。目前這種現象正在改變之中，數學教育家們正努力倡導以學生爲中心的主動學習，換句話說，要學生體驗數學而不是接受數學。數學教育家們主張用數學實驗室以增進學生對於數學的體驗。數學實驗室是很理想的體驗學習的環境。在數學實驗室中，學生在書桌、在工作台、在牆角、在地上個別的或分組的進行學習。學生們自由走動、討論、提問，他們在工作！在輕鬆的氣氛中，教師利用教具，並因應學生的興趣以培養學生學習數學的正確態度；學生主動地參與學習而再也不靜坐在教室中等待教師來“塡鴨”了。

在中小學的數學中，大量的教材是屬於資料的收集、檢驗、整理與歸類。這種性質的教材是很理想的數學實驗室的教材。我們首先簡單介紹數學實驗室如下：

一、什麼是數學實驗室？

數學實驗室不單單是一件東西，它甚至於不是一件具體的東西。數學實驗室可以想做是一種學習的環境，它也可以想做是數學教學的一種哲學。它是一種幫助學生學習數學的策略，它佈署舊經驗以協助學生獲得新經驗。

數學實驗室可以是整個教室，它可以是教室中的一角，它甚至於可以是一隻裝有教具的箱子或一張擺有資料的桌子。數學實驗室協助學生由各種具體的體驗到抽象的理解，它通常以具體物爲工具透過各種實際的經驗以孕育數學的各種思想與方法。數學實驗室並不是爲了將來而設的一種教學方法，它以及其他有價值的教學策略應該互相配合而且應用於今日的教學之中。

二、爲什麼需要數學實驗室？

數學教育家們爲什麼要倡導數學實驗室以改進數學的學習呢？換句話說，數學實驗室的優點是什麼呢？下列是以數學實驗室的方式進行學習的優點：

(1) 數學實驗室提供教師充分的個別輔導的機會。

(2) 學生能夠根據個人的能力決定學習的進度，並能在自己的能力範圍內盡量學習。

(3) 數學實驗室可以打破演講式教學的單調

氣氛，並以教師的教學型態去適應學生的學習型態。

(4) 數學實驗室讓學生接觸廣泛的具體資料並獲得各種有意義的學習經驗。

(5) 數學實驗室能孕育學生的實驗態度。

(6) 學生能夠考察一個構想，構成一種理論，並檢驗這種理論。

(7) 開放式的問題（例如，這塊磚頭有多重？這條繩子有多長？……等等的問題）容易讓每一位學生都能獲得某種程度的成就感以增進學習的信心與興趣。

(8) 未事先下定論的活動能使學生有機會去構成並檢驗自己的假說。

(9) 個別化的活動，對於智能較差的學生有激勵作用；對於資賦優異的學生則可提供探討更深入的問題以及創見的機會。

三、數學實驗室有些什麼不同的形式？

一般說來，在中小學校內可行的數學實驗室可以分爲三類。各校可按照本身的經費、設備、教室、教師的時間，教師的興趣等等實際情況斟酌發展比較合適的一類。茲將各類數學實驗室簡單介紹如下：

(1) 分散式的數學實驗室

這種實驗室分散在每一個教室中，每一個教師在自己的教室中都有一個自給自足的實驗室，是一種很理想的情況。將課桌椅拼湊起來就可以構成學生們個別的或小組的工作站。教師準備教學上所需要的各種器材。這裏所指的器材並非單指擺在教室後面的一些小箱子，小玩具之類讓兒童在課餘把玩的東西，而是在教學上所需要的各種教具與材料。這種實驗室通常是很費錢的，因爲每一個數學教室都應該有一整套的這種器材。利用分散式的數學實驗室，必須要有一位具有高度想像與創造能力的教師，他必須能體認學生在學習情境中所需要的經驗，他必須能提供學生所需要的數學經驗與觀察的情境。這種分散式的數學實驗室的實施，必須要有極度熱心的教師才能勝任。

(2) 活動式的數學實驗室

當一個學校所能購買的器材的數量受到限制時，這種活動式的數學實驗室具有很大的價值。這種數學實驗室通常是由一部龐大的推車所組成，全部的器材都被安排在車上的各種箱子之中，而某一種活動所需要的器材全部放置在同一個箱子中。這種活動式的數學實驗室可由一個教室推送到另一個教室，而教師們可按事先排定的時間表輪流使用。當推車抵達教室時，把桌椅拼合在一起，把車上的箱子分發給學生而教師卽時可以把自己的教室安排成一個數學實驗室。這種活動的實驗室固然有它的優點但也有它的缺點：

(a) 當需要使用到數學實驗室時却可能輪不到它。

(b) 當車子到處推送時，容易把車上的器材散失，並且難以維護。

(c) 實驗的數量與種類很少有變動。

(d) 這種實驗室往往變質而成爲一序列的活動，雖然有趣但對於當時所教學的單元並沒有具有意義的關連性。

(3) 集中式的數學實驗室

這是一種介於分散式與活動式的實驗室之間的一種形式。這通常是一間重新設計過，做爲永久性的數學實驗室的教室。很多班的數學課共用這個實驗室的設備。最理想的是要有一位特別夠資格的教師來管理這個實驗室，而這位教師的工作是協助來到這個實驗室的班級的師生從事教學。這位教師也負責安排各班級的使用時間表、活動設計、並負責器材的取得及維護、實驗室日誌的塡寫。同時，這位教師也是該校數學科發展的智囊人物。

在這種數學實驗室的周圍通常有一連串的工作台（或小房間），每一個工作台的設計可供一個或兩個學生做一項特定的實驗項目。室內的桌

椅都是活動的。在每一個工作台上都有一張卡片，說明使用該工作台的方法以及該項實驗的指引以幫助學生完成他們的實驗。當然，卡片必須足夠詳細以指引學生，但也不可太詳細以致於讓學生不必思索即可進行實驗工作。通常在每一個工作台上都要準備有足夠的器材，如鉛筆、紙張、墊板等等以爲學生紀錄之用。

在這種實驗室中最好要有一個貯藏室以貯存未完成的實驗。室中應有供應材料的厨櫃，至少要有一部複印機，充分的參考資料；每一個教師都有一個公文櫃以保存時間表，活動設計卡以及學生的工作紀錄；有足夠的電源插座以及可供小組或大群學生活動的空間；室中的一角必須保留給教師作爲準備各種材料之用；至少要有一面牆，上面設置有揭示板以及黑板。

四、教師在數學實驗室中所應扮演的角色是什麼？

教師必須創造學習的氣氛。在實驗室的安排中，教師很少告訴學生答案，甚至於很少告訴學生如何尋求答案，而只引導學生自己去發現。教師應該使用經過仔細措詞的問話或指導語鼓勵學生自己去發現。教師必須設計適合個別需要的活動。他必須知道何時提出問話以及何時保持緘默。

教師要鼓勵學生用一本簿子把自己所完成的活動及結果紀錄下來。這些紀錄提供給教師每一位學生的完整紀錄。

在使用數學實驗室之前，教師要先向學生介紹實驗室的情形；至少要讓學生有一天的自由參觀時間，讓學生進到實驗室中，參觀並動一動各種器材，並討論實驗室的規則；要讓學生瞭解器材使用過後應該放在何處，材料應該放在何處等等；指導學生如何把自己的進展紀錄下來。如果可能的話，最好讓學生選擇自己所喜愛的工作項目作爲開始的第一個活動。

五、結　論

在英美各國，尤其是美國，數學實驗室是數學教學中不可或缺的設備。隨着時間的推進，在國內的中小學裏使用數學實驗室教學的教師愈來愈多。教師根據教學內容而設計實驗室教學活動，並用實驗室型態的練習以配合自己的教學策略。有時候，先觀察後討論；有時候，以實驗作爲結束。希望教師透過這種數學實驗室而能更進一步地瞭解實驗室的教學法並把這種工學融會爲最高效率的教學策略。

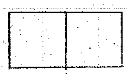
貳、數學實驗室教學活動設計實例

活動名稱：質數與合成數

教具：方瓦十七片，油印好的百數表

活動過程：

一、以方瓦的邊長爲單位長度1，並將2塊方瓦在桌子上排成如下圖所示的長方形：



圖一

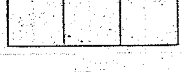
(1) 長方形的長爲____。

(2) 長方形的寬爲____。

(3) 長方形的面積爲____。

二、能否將2塊方瓦排成與圖(1)形狀不同的長方形？如果可能，則將其圖形畫在下面。

三、以3塊方瓦排成如下圖所示的長方形：



圖二

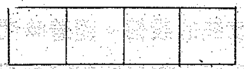
(1) 長方形的長爲____。

(2) 長方形的寬爲____。

(3) 長方形的面積爲____。

四、能否將3塊方瓦排成與圖(2)形狀不同的長方形？如果可能，則將其圖形畫在下面。

五、將四塊方瓦排成如下圖所示的長方形：



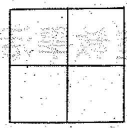
圖三

(1) 長方形的長爲____。

(2) 長方形的寬爲____。

(3) 長方形的面積爲____。

六、將4塊方瓦排成與圖(3)形狀不同的長方形，如下圖所示：



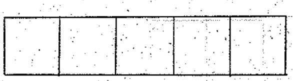
圖四

(1) 長方形的長爲____。

(2) 長方形的寬爲____。

(3) 長方形的面積爲____。

七、將五塊方瓦排成下列圖形。



圖五

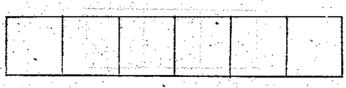
(1) 長方形的長爲____。

(2) 長方形的寬爲____。

(3) 長方形的面積爲____。

八、能否將5塊方瓦排成與圖(5)形狀不同的長方形？如果可以，則將其圖形畫在下面。

九、將6塊方瓦排成如下圖所示的長方形：



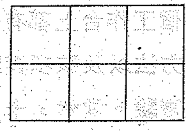
圖六

(1) 長方形的長爲____。

(2) 長方形的寬爲____。

(3) 長方形的面積爲____。

十、將6塊方瓦排成與圖(6)形狀不同的長方形如下。



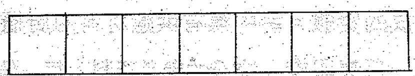
圖七

(1) 長方形的長爲____。

(2) 長方形的寬爲____。

(3) 長方形的面積爲____。

十一、將7塊方瓦排成如下圖所示的長方形：



圖八

(1) 長方形的長爲____。

(2) 長方形的寬爲____。

(3) 長方形的面積爲____。

十二、能否將7塊方瓦排成與圖(8)形狀不同的長方形？如果可以，則將其圖形畫在下面。

十三、將以上所得的資料填入下表中：

方瓦數	第一個長方形面積＝長×寬	能否排成第二個長方形？	第二個長方形面積＝長×寬
2	2＝2×1	否	
3	3＝3×1	否	
4	4＝4×1	能	4＝2×2
5	5＝5×1	否	
6	6＝6×1	能	6＝3×2
7	7＝7×1	否	

十四、根據上表，有某些數目的方瓦，如4塊，6塊，可以排成兩種以上形狀不同的長方形；有某些數目的方瓦，如2塊，3塊，5塊，7塊，只能排成一種長方形，換句話說，這些數，如2，3，5，7，恰含有1和其本身兩個因數，我們稱它們爲質數；而像4，6，8……這些數，它們除了1和其本身之外尙含有其他不同的因數，我們稱它們爲合成數。

上表中的質數有____，____，____和____。

上表中的合成數有____和____。

十五、利用8塊，9塊，10 塊方瓦，重複以上的操作，決定何者爲質數？何者爲合成數？

十六、下表中有1至100的各數。我們想發現一個簡便的方法以決定表中那些是質數？那些是合成數？我們所要介紹的方法是由古希臘的數學家 Eratothenes 首創的，因此我們稱它爲 Eratothenes 濾套（Sieve of Eratothenes），以紀念 Eratothenes 的成就。

Eratothenes 濾套

~~1~~	②	③	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

十七、在上表中，第一個質數是2（我們規定質數爲恰含有2個因素的整數，因此1不是質數），用一個小圓圈把它圈起來，如②。現在檢查表中所有的偶數，它們都含有2爲其因素，因此它們都不是質數，故把它們畫掉，如~~4~~，~~6~~，……。

十八、2的下一個質數是3，把它圈起來，並把3的所有的倍數畫掉。注意：有些3的倍數已經在前面的過程中被畫掉了，你知道爲什麼嗎？

十九、3的下一個質數是5，把它圈起來，並把5的所有的倍數全部畫掉。你應該也會發現某些5的倍數也已被畫掉了。

二十、5的下一個質數是7，把它圈起來，並把7的所有的倍數全部畫掉。

二十一、現在把表中尚未被畫掉的所有的數全部圈起來。如此，所有被圈起來的數都是質數。

由上面的過程中，我們可以看出 Eratothenes 濾套的確是求取小於100 的質數的一種很簡便的方法，因爲只要我們知道小於或等於7的全體質數就可以知道小於100的全體質數。

二十二、問題：Eratothenes 濾套固然很方便，但爲什麼只要把小於或等於7的所有質數的倍數畫掉後所留下來的就是質數呢（1除外）？它有沒有理論根據？

在回答上列問題之前，且先讓我們觀察整數論中的一些事實：

我們知道任意大於1的整數都可分解成有限個正的質因數的乘積。爲什麼？設 n 爲任意給定大於1的整數。若 n 本身爲一質數，則上面的敍述顯然成立。若 n 本身不是質數，則 n 必含有一個正的質因數（爲什麼？）令其爲 P_1，而得

$n = P_1 \cdot n_1$，式中 n_1 爲正整數且 $n_1 < n$

因爲 n 不是質數，故 $n_1 > 1$。若 n_1 爲質數，則 n 可分納爲兩個質因數的等積；若 n_1 不是質因素，則 n_1 含有一個正的質因素 p_2，並令

$n_1 = p_2 \cdot n_2$，式中 n_2 爲正整數且 $n_2 < n_1$

故得

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot n_2$$

仿上繼續做下去，我們可得一個正的整數列

$$n_1, n_2, n_3, \cdots\cdots n_k, \cdots\cdots$$

且

$$n_1 > n_2 > n_3 > \cdots\cdots > n_k > \cdots\cdots$$

我們可在以上的正整數列中選取一個最小的正整數（可能嗎？），令其爲 n_m．顯然 $n_m \geq 1$。我們更可肯定 $n_m = 1$，否則可從前面的分解過程中得

$n_m = p_{m+1} \cdot n_{m+1}$，式中 p_{m+1} 爲正的質數；n_{m+1} 爲正整數，且 $n_{m+1} < n_m$

但"$n_{m+1} < n_m$"顯然與"n_m 爲整數列 $\{n_k\}$ 中的最小的正整數"的假設矛盾。因此我們可得

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots \cdot p_m$$

即 n 可分解成有限個正的質因數的乘積。

以上我們所證明的事實就是整數論中所謂的算術基本定理（Fundamental Theorem of Arithmetic），即任意大於 1 的整數 n 均可分解為有限個正質因數的乘積，$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_m$。若不計較質因數 $p_1, p_2, \cdots, p_m$ 出現的次序，則其分解具有唯一性，換句話說，若

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_m = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \cdots \cdot q_r$$

則 $m = 1$ 且 $p_i = q_i$，$i = 1, 2, \cdots, m$（證明！參閱〔1〕）。

當我們在判斷正整數 n 是否為質數時，我們要檢驗 n 是否含有大於 1 而小於 n 的因數。在公元 1638 年整數論的大家 Fermat 發現：在判斷 n 是否為質數時，只要檢驗 n 是否含有大於 1 而小於或等於 $\sqrt{n}$ 的因數即可。根據算術基本定理，我們可以推論：在判斷 n 是否為質數時，只要檢驗 n 是否含有大於 1 而小於或等於 $\sqrt{n}$ 的質因數即可。我們將上面 Fermat 的發現總結為下列定理：

［定理］設正整數 n 有一個正的質因數 p，且令 $n = p \cdot k$。若 $p^2 > n$ 且 q 為 k 的任意質因數，則 $q^2 < n$。

證明：因 q 為 k 的因數，故可令

$$k = q \cdot l \text{，式中 } l \text{ 為正整數。}$$

今由 $n = p \cdot q \cdot l$ 得

$$n^2 = p^2 \cdot p^2 \cdot l^2$$

但已知 $p^2 > n$，故得

$$q^2 \cdot l^2 < n$$

因此，$q^2 < n$.

在上面定理的證明中，我們並未用到 p，q 是質數的條件，因此把 p，q 為質數的條件寬除後本定理仍然成立。

現在讓我們回到 Eratothenes 的濾套。設 k 為小於100的任意正整數。若 k 不是質數，則 k 必有小於或等於 $\sqrt{k}$ 的質因數，但

$$\sqrt{k} \leq \sqrt{100} = 10$$

因此，k 必有小於或等於 10 的正質因數。故 k 必為小於或等於 7 的正質數中的某些正質數的倍數。因此 k 必會在 Eratothenes 濾套的過程中被畫掉，而剩下來未被畫掉的必定是質數。這就是 Eratothenes 濾套的理論根據，而問題（二十二）也得到了解答。

參考資料

〔1〕Johnson, R.E. First Course in Abstract Algebra, Printice-Hall, 1958.

〔2〕Krulik, S. A Mathematics Laboratory Handbook for Secondary School, W.B. Saunders Company, 1972.

〔3〕Long, C.T. Elementary Introduction to Number Theory, D.C. Heath and Company, 1966.

升學主義壓力影響科教推展

本社

主持第一屆科學教師評審的召集人，師大理學院院長楊冠政指出，由首屆科學教師的評審可看出，升學主義已嚴重影響科學教育的推展。

楊院長說：在這次錄取的四十八人中，其中高中十人，國中十三人，國小二十五人。而高中優等一人，甲等六人，乙等三人；國中特優一人，優等三人，甲等四人，乙等五人；國小特優一人，優等六人，甲等八人，乙等十人。

不僅得獎作品顯示國小比國中多，國中比高中多，就是推荐申請的一百五十餘人中，亦有這種現象。這一現象是由於國民中、小學沒有升學之壓力，而高中有升學壓力，使教師也減少了研究的餘力。

由於教師對學生的影響極大，優良科學教師將可啓廸學童對科學的興趣，對國家未來的科學發展影響甚鉅。而目前升學主義對科學教育的影響是值得有關單位重視的。