，但這與下式矛盾 $b \geq N+1 > k$. 同理可推得 $u \neq 0$，因此 $b \leq m+k$ 成立的必要條件為 $\lambda = u = 1$. 若 $b \geq N+1$ 與 $\frac{a}{b} \in F_{N+1}$，則 $b = N+1$.

又因 $\frac{l+h}{m+k} \notin F_n$，$h/k$ 與 l/m 為 F_N 中的連續二項，故有 $m+k \geq N+1$. 由上討論可知如 $b = N+1$，即有 $\lambda = u = 1$，因此

$$\frac{a}{b} \in F_{N+1} \Rightarrow a = h+l,\ b = k+m,$$

$$\frac{a}{b} = \frac{h+l}{k+m}.$$

因為 $kl - hm = 1$，所以 $\frac{a}{b}$ 滿足了此定理，故此定理在 F_{N+1} 時成立（我們已先假設 F_N 成立）。

有了以上之定理，我們可證明 $ax + by = 1$，$(a, b) = 1$ 整數解的存在。

令 $b > a > 0$ 與 $(a, b) = 1$，則 $\frac{a}{b}$ 為 F_b 中之一項，又令 $\frac{h}{k}$ 為 $\frac{a}{b}$ 的前接（最近前一項）分數。由上述定理得 $ka - hb = 1$，故 $x = k$ 與 $y = -h$ 為 $ax + by = 1$，$(a, b) = 1$ 的整數解。

例2　求 $2x + 5y = 1$ 之整數解

解：因 $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$，而在 F_5 中 $\frac{2}{5}$ 之前一項為 $\frac{1}{3}$

故　$x = 3$　$y = -1$ 為其整數解

一個問題是：實際計算時，上述之證明方法是否可行，答案是肯定的如同例2所示，但是不是一個有效的方法呢？這可不是一個值得鼓勵的方法。可不可以進一步的簡化呢？這有待於大家的深思了。

質因數之識別

黃來興
——金門安瀾國小——

國小及國中教授到有關整數的質數與合數的問題時，只有說到質因數2、3、5、11等數的識別，但無7、13、17、19、23…等等的識別，因此常有一些數字有2、3、5、11以外的質因數，而無法求得，現提供以下幾個質數之識別法：

一質因數7之識別：如有一數，將這數的末一位數字去掉，把所剩之數減去所去掉的數字的兩倍，按此法繼續演算，如最後所剩之數是零或七的倍數，就有質因數7（如例一）。

二質因數 11 之識別：如書中一種外，還可將末一位去掉，用所剩之數減去所去掉之數，仿此反覆進行，最後若得0或11 的倍數，就有質因數 11（如例二）。

三質因數13 之識別：①將末位數去掉，把所剩之數減去所去掉之數的九倍，仿此繼續做下去，至最後若是0或13 的倍數，就有質因數13（如例三）。②若去掉之數為3、6、9三數，則可用去掉之數除以3，而後用所得的商從去末位數字後所剩之數減去（如例四）。③兩種同時使用亦可。

四質因數 17 的識別法：將末位數字去掉，把所剩之數減去所去掉之數的5倍，仿此繼續下去至最後若為0或 17 的倍數，就有質因數 17（如例五）。

五質因數 19 的識別法：①將末位數字去掉，把所剩之數減去所去掉之數的 17 倍，仿此繼

續下去，至最後若是 0 或 19 的倍數，就有質因數 19 。②亦可將末位數字去掉，把所剩之數減去（ 9 －末位數字 ）× 2 ＋ 1 ，如最後爲 0 或19 的倍數，亦有質因數 19 。③兩種混合使用亦可（如例六）。

例一①
```
3 2 4 )8
   1 6
3 0)8
 1 6
1 4
```
因3248依左式可分爲 168+1680+1400 =7×3×8+7×3×80+7×20 =7×(3×8+3×80+200) 所以有 7 這質因數

②
```
6 8 9 0 )1
        2
6 8 8)8
  1 6
6 7)2
   4
6)3
6
0
```
因68901 依左式可分爲：21+1680+4200+6300 =7×3+7×3×80+7×3×200+7×3×3000 =7×3×(1+80+200+3000) 由此式可知必有質因數 7 並且有質因數 3 ，所以如餘數是 0 ，就有 3 、7 兩質因數。

例二①
```
3 4 8 5 0)2
        2
3 4 8 4)8
      8
3 4 7)6
    6
3 4)1
  1
3 3
```
②
```
2 4 6 8)4
      4
2 4 6)4
    4
2 4)2
  2
2 2
```
分解如例一所以可知必有質因數 11

例三①
```
1 8 6 4)2
    1 8
1 8 4)6
  5 4
1 3 0
```
亦可用
```
1 8 6 4)2
    1 8
1 8 4)6
    2
1 8)2
1 8
0
```

例四①
```
1 7 2)9
    3
1 6)9
  3
1 3
```
亦可用
```
1 7 2)9
  8 1
  9)1
  9
  0
```
分解如質因數 7 ，由此可知必有質因數 13。

例五①
```
8 8 7)4
  2 0
8 6)7
3 5
5)1
5
0
```
②
```
6 9)9
4 5
2 4
```

例六①
```
4 6 1)7
1 1 9
3 4)2
3 4
0
```
②
```
4 6 1)7
    5
4 5)6
  7
3 8
```
③
```
4 6 1)7
1 1 9
3 4)2
1 5
1 9
```
④
```
2 3 0 0)9
      1
2 2 9)9
    1
2 2)8
  3
1 9
```
⑤
```
2 3 0 0)9
  1 5 3
2 1 4)7
1 1 9
  9)5
  9
  0
```
所以兩種方法均可求出 19 的倍數。

結論：①識別法之由來，因 7 × 3 =21，第十位數字是個位數字的 2 倍，所以將個位數字去掉乘 2 放在十位，一字是 7 的倍數，而 13 × 7 ＝ 91 的十位數字是個位數字的 9 倍， 17 × 3 ＝ 51 十位數字是個位數字的 5 倍，由是其餘之數亦可類推。

②由以上 7 、11 、 13 、 19 等質數之識別法，可推出其餘質數之識別法如 41 ，61 ，去末數乘以 4 倍及 6 倍。