常態分配的數學教學

薛 昭 雄
國立政治大學

㈠

在高中的課程標準裡，高三一學期中，必須教一些機率與統計的材料。有關“常態分配”的教學，雖不列於課程標準之中，但對於如此重要的單元實不容忽視（至少對優異的同學更屬必要）。本短文擬就高中學生的程度來設計如何教常態分配。更確實地說，擬由二項分配做爲基礎來教學常態分配。

㈡

我們知道下列的公式

$$P(r)=\binom{n}{r}p^{r}q^{n-r}\qquad(q=1-p)\qquad(1)$$

假使就(1)式中之 r 改爲 r+1，取得

$$P(r+1)=\binom{n}{r+1}p^{r+1}q^{n-r-1}\qquad(2)$$

由(1)與(2)得

$$\frac{P(r+1)}{P(r)}=\frac{n-r}{r+1}\cdot\frac{p}{q}\qquad(3)$$

由於二項分配 b(n, p) 之均數（mean）及標準差（standard deviation）分別爲 np 與 $\sqrt{npq}$，因此我可令一新變數 x 爲

$$x=\frac{r-np}{\sqrt{npq}}\qquad(4)$$

或 $r=np+x\sqrt{npq}$

顯然 x 之平均數及標準差爲 0 及 1。

就圖形而言，(4)式（由 r 轉爲 x）說明了

(a) 原點平移爲 np

(b) 將 r 軸之坐標以 $\dfrac{1}{\sqrt{npq}}$ 之比例縮小

由於(4)式，P(r) 就可看成 x 的函數。因此再令

$$\varphi(x)=\sqrt{npq}\;P(r)\qquad(\text{爲甚麼？})\qquad(5)$$

今(4)式中之 r 代之爲 r+1，得

$$\frac{r+1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{r-np}{\sqrt{npq}}+\frac{1}{\sqrt{npq}}$$

$$=x+\Delta x,\ \text{其中}\ \Delta x=\frac{1}{\sqrt{npq}}$$

由(5)式得

$$\varphi(x+\Delta x)=\sqrt{npq}\,P(r+1)$$

故由(5)，(6)及(3)式得

$$\frac{\varphi(x+\Delta x)}{\varphi(x)}=\frac{P(r+1)}{P(r)}=\frac{n-r}{r+1}\cdot\frac{p}{q}$$

亦即

$$\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\varphi(x)}=\frac{np-r-q}{(r+1)q}$$

$$=-\frac{x\sqrt{npq}+q}{(np+x\sqrt{npq}+1)q}$$

（由(4)式得）

因而

$$\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}\cdot\frac{1}{\varphi(x)}$$

$$=-\frac{x\cdot npq+q\sqrt{npq}}{npq+xq\sqrt{npq}+q}=-\frac{x+\sqrt{\dfrac{q}{np}}}{1+x\sqrt{\dfrac{q}{np}}+\dfrac{1}{np}}$$

令 $n\to\infty$（亦即 $np\to\infty$），則 $\Delta x=\dfrac{1}{\sqrt{npq}}\to 0$，因此 $\dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=-x$

即 $\log\varphi(x)=-\dfrac{x^{2}}{2}+c$ 或 $\varphi(x)=ce^{-\frac{x^{2}}{2}}$

此即得常態分配點

㈢

就㈡所述，我們瞭解這樣推演步驟自較容易由高中學生所接受，但有一點仍需指出者，乃是初步的導數定義仍不能避免，這是比較困難克服的。或許高中老師們可提供如何避免引用導數的方式。