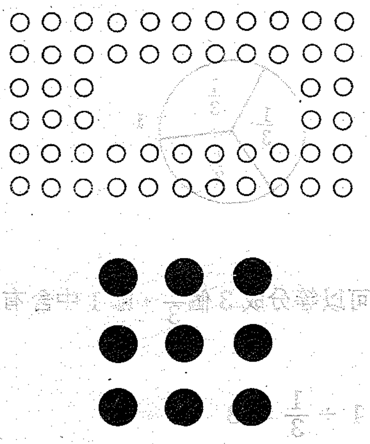
國小數學教室
疑難問題與解答

呂溪木
國立臺灣師範大學

臺灣省國民教師研習會在今年十月中召集各縣市國民小學數學科輔導員舉行數學科教材教法研討會。會中各縣市輔導員提出很多疑難問題，並由國民小學數學課程實驗研究小組黃敏晃、薛昭雄、周筱亭、呂溪木等四位研究委員對於所提出的疑難問題加以解答。因爲這些都是各縣市輔導員平常在輔導的時候所碰到的疑難問題，所以頗具代表性。茲將其中部分問題作答如下，以供教師們參考：

〔問〕（第九册第 42 頁中復習㈠的第(8)題）在本題中，因爲○與●的大小不一樣，學生除了比較它們的個數之外，又更進一步比較它們的大小，觀念容易偏差。

〔答〕按原題目爲：下圖中○的個數是●的個數的多少倍？



本問題的目標在於測驗學生是否“能使用整數四則中的乘法、加法與減法運算以計算半具體物的個數，並透過半具體物的個數比較兩個數的大小”。本問題所問的是圖中圓圈的“個數”而不是“大小”，如果學生因爲圖中兩種顏色的圓圈的大小不同而在比較它們的個數時受到困擾，則可見學生對於“個數”的觀念尚未建立。此時，教師應該設法再指導學生建立“個數”的觀念。因爲學生已進入了五年級，我們認爲這個題目對於兩種不同顏色的圓圈作不同大小的安排不但沒有不妥的地方而且可以發現學生是否眞正瞭解“個數”的意義。

〔問〕（第九册第 67 頁有關循環小數的部分）在循環小數，如 $0.\overline{315}$ 的循環節上劃一線段，有何名稱？以往的教科書以 $0.\dot{3}1\dot{5}$ 表示而現在的教科書改爲 $0.\overline{315}$，有何理由？到底是根據國外的教科書的表示法或是作者自己創造的？

〔答〕在數學中爲了研究上的方便，我們常規定一些數學名詞。不過，名詞規定的愈多則所需要死記的項目也就愈多。煩多的數學名詞對於小學生是一種很大的負擔。因此，若無必要則最好不要規定新的名詞以增加麻煩。即使有必要規定一個新的數學名詞也應該配合它的意義，才會顯得很“自然”。在循環小數 $0.\overline{315}$ 的循環節上的線段，教科書上雖然沒有給它命名，但是

如果我們把它叫做“循環線”也是很自然而且合理的。因爲付給該線段一個名字之後，在教學時說明起來有很多方便。

在中外的數學書籍中，對於循環小數的表示法，$0.\dot{3}1\dot{5}$ 和 $0.\overline{315}$ 兩種都被採用。至於現行的教科書中以 $0.\overline{315}$ 取代以往的 $0.\dot{3}1\dot{5}$ 的理由據說是：$0.\dot{3}1\dot{5}$ 常因印刷不清楚而容易被誤爲 $0.31\dot{5}$ 而以 $0.\overline{315}$ 表示則比較不會有印刷不清楚的困擾。我相信這種改變的理由是會被大家所接受的。

〔問〕（第十一册第九單元中有關“分數的除法”的部分）整數除以眞分數時，要把分數的分子和分母互換，爲什麼？學生不易瞭解其中的道理而只能死記死用。是否有比較好的說明方法？

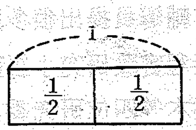
〔答〕這個提問很有建設性。這個單元對於兒童來說的確是比較困難的一個單元，也是教學時比較不容易說明的一節。因爲不容易說明，所以很多教師就令兒童死記計算方法。當然這或許也是數學教學中偶而要使用的方法，例如有些教材必須在很早的階段教給兒童以爲進一步學習的基礎，但這些教材的難度又超過現階段兒童的理解程度（如圓的面積公式，數系的構造，等等）。在這種情況下，往往只令兒童知其然而不一定要求兒童知其所以然。等到兒童繼續往前學習以及心智發展漸趨成熟之後，往往會豁然融會貫通的。不過，站在教學的立場，在指導學生學習時不但要使兒童知其然而且要想盡辦法使兒童知其所以然。這就是就從事課程以及教材教法研究的目標。

當我們在指導兒童作“整數除以眞分數”的計算時，不但要使兒童發現要把分數的分子與分母互換以後再乘整數，而且要使兒童瞭解其中的道理。數學教育家們一直在努力研究最容易被兒童接受的解釋方法。我們現在介紹其中一種解釋方法，通常被稱爲“以單位分割運算法 Unit Division Algorithm）”：這是屬於歸納法。首先考慮很簡單的式子：

$$1 \div \frac{1}{2} = ?$$

在指導這種除法時，兒童應該早就知道分數“$\frac{1}{2}$”的意義以及除法的意義。可先以“整數除以整數”的除法喚起兒童對於除法的意義的回憶，例如：

$6 \div 3 = 2$ 表示 6 裏面含有 2 個 3；$4 \div 2 = 2$ 表示 4 裏面含有 2 個 2；……等等。因此，$1 \div \frac{1}{2} = \boxed{?}$ 的意思是表示 1 裏面含有 $\boxed{?}$ 個 $\frac{1}{2}$。但分數 $\frac{1}{2}$ 的意義就是把 1 分成 2 等分中的 1 分，可利用摺紙的操作加以說明，如下圖所示：



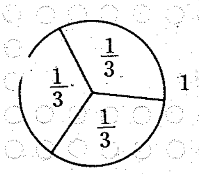
因此，1 可以分成 2 個 $\frac{1}{2}$，即 1 中含有 2 個 $\frac{1}{2}$。故得

$$1 \div \frac{1}{2} = 2$$

其次考慮下面這個式子：

$$1 \div \frac{1}{3} = ?$$

仿上，兒童應該要明白此式即表示：1 中含有多少個 $\frac{1}{3}$？而“$\frac{1}{3}$”的意義就是把 1 分成 3 等分中的 1 分，可用分餅的操作加以說明，如下圖所示：



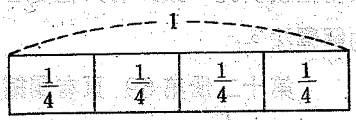
因此，1 可以等分成 3 個 $\frac{1}{3}$，即 1 中含有 3 個 $\frac{1}{3}$。故得

$$1 \div \frac{1}{3} = 3$$

再考慮另一個式子：

$$1 \div \frac{1}{4} = ?$$

利用摺紙的操作，如下圖所示：



兒童很容易看出 1 可以等分成 4 個$\frac{1}{4}$，即 1 中含有 4 個$\frac{1}{4}$，故得

$$1 \div \frac{1}{4} = 4$$

依此類推，我們可以讓兒童利用“分餅”與“摺紙”的操作寫出下列各等式：

$$1 \div \frac{1}{2} = 2$$

$$1 \div \frac{1}{3} = 3$$

$$1 \div \frac{1}{4} = 4$$

$$1 \div \frac{1}{5} = 5$$

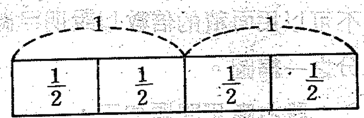
$$1 \div \frac{1}{6} = 6$$

……………

現在更進一步考慮式子：

$$2 \div \frac{1}{2} = ?$$

利用摺紙的操作，如下圖所示：



讓兒童發現 2 中含有 4 個$\frac{1}{2}$，並且發現每一個 1 中含有 2 個$\frac{1}{2}$而 2 個 1 就含有 4 個$\frac{1}{2}$。故得

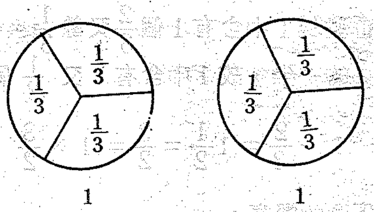
$$1 \div \frac{1}{2} = 1 \times 2$$

$$2 \div \frac{1}{2} = 2 \times 2$$

同樣的，對於

$$2 \div \frac{1}{3} = ?$$

這個式子，我們可讓小朋友利用“分餅”的操作，如下圖所示：



使小朋友發現 2 中含有 6 個$\frac{1}{3}$，並且發現每 1 個 1 中含有 3 個$\frac{1}{3}$而 2 個 1 中含有 6 個$\frac{1}{3}$。故得

$$1 \div \frac{1}{3} = 1 \times 3$$

$$2 \div \frac{1}{3} = 2 \times 3$$

仿此繼續做下去，兒童當能得到下列結果：

$$1 \div \frac{1}{2} = 1 \times 2 = 1 \times \frac{2}{1}$$

$$1 \div \frac{1}{3} = 1 \times 3 = 1 \times \frac{3}{1}$$

$$1 \div \frac{1}{4} = 1 \times 4 = 1 \times \frac{4}{1}$$

$$1 \div \frac{1}{5} = 1 \times 5 = 1 \times \frac{5}{1}$$

…………………………

$$2 \div \frac{1}{2} = 2 \times 2 = 2 \times \frac{2}{1}$$

$$2 \div \frac{1}{3} = 2 \times 3 = 2 \times \frac{3}{1}$$

$$2 \div \frac{1}{4} = 2 \times 4 = 2 \times \frac{4}{1}$$

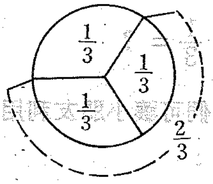
$$2 \div \frac{1}{5} = 2 \times 5 = 2 \times \frac{5}{1}$$

…………………………

最後再考慮下列比較複雜的式子：

$$1 \div \frac{2}{3} = ?$$

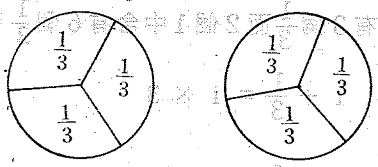
由“分餅”的操作，如下圖所示：



兒童當會發現 1 中含有 1 個$\frac{2}{3}$又餘$\frac{1}{3}$。但所餘的$\frac{1}{3}$恰爲$\frac{2}{3}$的一半，故 1 中含有 1 又 $\frac{1}{2}$ 個$\frac{2}{3}$，即

$$1 \div \frac{2}{3} = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1 \times \frac{3}{2}$$

再利用下圖的觀察：



讓小朋友發現：每一個 1 中含有$\frac{3}{2}$個$\frac{2}{3}$，故 2 個 1 中含有 $2 \times \frac{3}{2}$個$\frac{2}{3}$，即

$$2 \div \frac{2}{3} = 2 \times \frac{3}{2}$$

繼續以上的討論，並將討論所得綜合列表如下：

$1 \div \frac{1}{2} = 1 \times \frac{2}{1}$　　$2 \div \frac{1}{2} = 2 \times \frac{2}{1}$

$1 \div \frac{1}{3} = 1 \times \frac{3}{1}$　　$2 \div \frac{1}{3} = 2 \times \frac{3}{1}$

$1 \div \frac{1}{4} = 1 \times \frac{4}{1}$　　$2 \div \frac{1}{4} = 2 \times \frac{4}{1}$

$1 \div \frac{1}{5} = 1 \times \frac{5}{1}$　　$2 \div \frac{1}{5} = 2 \times \frac{5}{1}$

…………………　…………………

…………………　…………………

$2 \div \frac{2}{3} = 2 \times \frac{3}{2}$

$2 \div \frac{2}{4} = 2 \times \frac{4}{2}$　　$2 \div \frac{3}{4} = 2 \times \frac{4}{3}$

$2 \div \frac{2}{5} = 2 \times \frac{5}{2}$　　$2 \div \frac{3}{5} = 2 \times \frac{5}{3}$

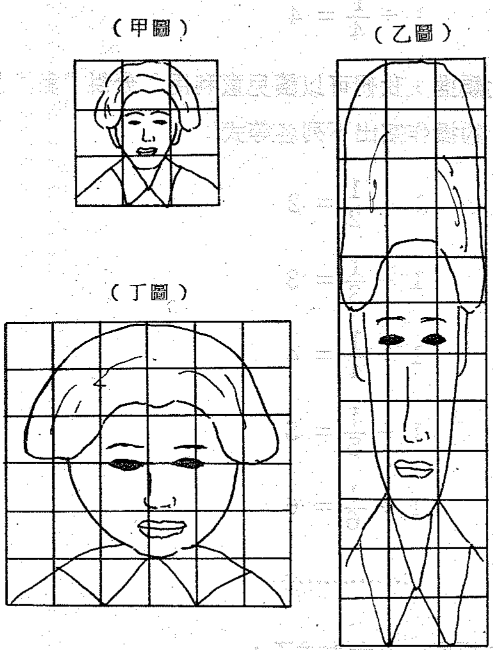
…………………　…………………

…………………　…………………

觀察上表中各等式，不難歸納出下列結果：在作整數除以眞分數的運算時，先將分數的分子與分母互換，再將所得的分數乘該整數。我們相信以上這種歸納的步驟有助於兒童對於“整數除以眞分數”的計算方法的瞭解。當然，從事數學教育的人應當繼續研究，或許有其他更容易被兒童所接受的解釋法。

〔問〕（第十二册第 69 頁有關縮圖的部分） 甲圖是丁圖的$\frac{1}{2}$縮圖，應該如何說明？爲什麼不用面積的倍數說明呢？

〔答〕 如下列各圖：



甲圖的面積是 9 而乙圖及丁圖的面積都是 36 並且都是甲圖面積的 4 倍，但是甲圖是丁圖的二分之一縮圖而甲圖却不是乙圖的二分之一縮圖。因此，顯然不可以用面積的倍數以說明甲圖是否爲丁圖的二分之一縮圖。

〔問〕 設有應用問題如下：

甲每分鐘走 40 公尺，乙每分鐘走 50 公尺，兩人相背而行，問 1 小時 30 分後兩人相距多少公尺？

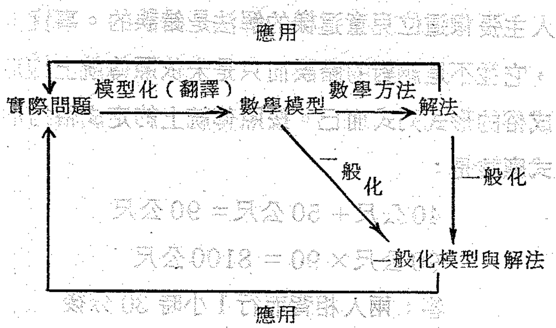
如果兒童寫出如下的解法，可否算是正確的？應如何給分？

（40 + 50）× 1 時 30 分

= 90 × 90 分

= 8100（公尺）

〔答〕　這種問題的確困擾了許多國小教師。很多老師們經常提出這種類似的疑惑，甚至於爲了給分的標準而發生爭執。在此，我們想提出我們對於這種問題的說明與看法。爲此，我們不得不首先將“數學的內涵”作一個扼要的介紹。一般人常誤以爲數學是一門專門講求抽象的學問，不但是艱深難懂而且是不切實際的空中樓閣。從表面上看起來的確令人有如此的感覺，但事實上並不然。數學的出發點是在於研究如何解決實際問題的方法。當我們在日常生活中遇到一個問題時，就必須想辦法去解決它。當我們解決了一件實際問題就獲得了一種經驗，我們當然希望把這種經驗累積起來以供日後解決同樣問題的參考。日後如果我們自己或他人碰到同樣的問題就可以直接引用我們的經驗而不必再費時費力去重新思考解決的方法。有很多實際的問題雖然不盡相同但却很類似，某一個問題的解法往往也可以適用在與其類似的問題上面。爲了有效地利用這些經驗，我們把類似的問題與解法歸類整理並用數學語言表示出來。每一類的問題與其解法都有其特別的模式，這就是數學上所謂的數學模型（Mathematical Models）。例如：加法、乘法、除法、一元一次方程式、一次函數、二次函數、……等等，都是數學模型。把實際問題歸類整理爲數學模型的這種翻譯的過程稱爲模型化（Modelization）。每一個數學模型都有它的特殊的解法，就是數學方法（Mathematical Methods）。將來碰到了一種實際問題，只要判定它是屬於那一種數學模型，我們就可以引用這一種模型的解法去解決它。這就是數學模型與解法的應用。每一種數學模型都是從實際問題簡化而來，因此它有它的條件限制。一個模型所受的條件限制愈多則它的適用範圍愈小。爲了使數學模型與數學方法的效率充分發揮，我們希望把各種數學模型所受的條件限制盡量寬除，以增加它的應用範圍。這就是所謂數學模型的一般化（Generalization）。茲將以上所討論的過程以簡圖表示如下：



由上面的討論，我們可以看出數學的過程，簡單地說，可以劃分爲：模型化（翻譯），數學方法，一般化與應用。某一個數學模型由於一般化的結果產生一個新的數學模型，而這個新的模型再經過一般化的過程又產生另一個新的數學模型。如此一來，新的數學模型不斷地衍生，而數學的領域就像滾雪球一樣，愈來愈龐大。本來每一個數學模型都是由一個實際問題翻譯過來的，但經過多次一般化之後，當然就很難看出這個數學模型與其原來的實際問題之間的關聯了，因而顯得極爲抽象。一般人之所以把數學誤爲是空中樓閣就是這個道理，因爲他們並沒有對於這個數學模型的來龍去脈加以詳細的研究。

現在讓我們回到原來的提問上面來。在提問中所給定的問題是一種應用問題，也是日常生活中的實際問題。對於這個問題，兒童所寫出的解法過程爲：

（40＋50）×1時30分
＝90×90分
＝8100（公尺）

在上面的解法過程中，我們顯然可以看出這位兒童對於所給定的題目完全瞭解，並能利用加法以及乘法的模型來解決這個問題。我們也可以看出這個兒童的思考過程很正確，因爲給定的速度分別爲每分鐘 40 公尺及每分鐘 50 公尺，所以他在運算過程中把 1 小時 30 分化爲 90 分；而又因爲兩人相背而行，所以列式時利用加法求得速度的和爲（40＋50），再乘以時間 90 分。這種解法的爭論焦點發生在算式中的乘數爲名數，而教科書上的算式中乘數都是不名數。因此，有

人主張像這位兒童這樣的解法是錯誤的。事實上，它並不是絕對的錯誤而只是未依照傳統上約定成俗的形式列式而已。按照傳統上約定成俗的形式應該是：

40公尺＋50公尺＝90公尺

90公尺×90＝8100公尺

答：兩人相背而行1小時30分後

兩人相距8100公尺

既然列式的形式是一種約定，則愈簡潔的形式愈理想。因此，現行的教科書索性把名數全部略去而得如下的解法：

40＋50＝90

90×90＝8100

答：兩人相背而行1小時30分後

兩人相距8100公尺

話又說回來，在物理上所常用的算式中往往乘數與被乘數都是名數的，例如

100公尺／秒×20秒＝2000公尺

像這種列式的方法雖然較煩，但却很清楚。因此列式的形式往往因爲實際上的需要而作不同的約定。考試的目的在於評量學生是否瞭解所學的內容。既然我們可由兒童的解法過程中看出兒童對於數學過程〔依照題意列式（翻譯），利用式子的運算求解（解法）〕有所瞭解並能據以求得正確答案，則應當給予兒童應得的分數。因此，我們對於本提問的意見是：像這位兒童這樣的解法應該算是正確的。不過，我們希望教師們能夠相機指導小朋友使用我們共同約定成俗的形式列式。

因爲大家對於以上這個問題的看法很不一致，因此我們想再舉一個經常發生爭論的類似問題與其解法並討論如下：

設有5盤水果，每盤中各有2個，

共有水果多少個？

按照現行教科書的形式，其解法應爲

2×5＝10（或2個×5＝10個）

答：共有水果10個

假使有小朋友作如下的解法，是否算正確呢？

5×2＝10　（或5×2個＝10個）

答：共有水果10個

對於這個問題也有兩種不同的看法。主張這種解法是錯誤的理由是因爲乘數應該是不名數。國小數學課程實驗研究小組的委員們在臺灣省國民教師研習會曾經在去年針對這個問題就各種不同的角度討論了好幾個下午，最後的結論是：依照數學的觀點，如果兒童的思考過程正確，則以上所列的兩種解答形式當然都是對的。若能在教學過程中能配合乘法的交換律同時指導兩種不同的解法形式，更富有教育價值。不過，爲了避免一般程度的兒童因爲同時學習兩種不同的解法形式而感到混亂，我們在目前的實驗教材中仍以第一種形式出現。在小朋友完全瞭解之後也可以再出現第二種形式。最重要的是在教學指引中我們特別強調，如果小朋友以第二種形式作答也應該算是正確的，以溝通大家的觀念。

〔問〕　（第九册第91頁，練習十六中的第(7)題）

理髮一次要6.5元，大年每兩個月理髮三次，大年一年所用的理髮費用共要多少元？理髮一次6.5元，既不是整數又不合實際！

〔答〕　這個提問的意思大概是指題目中所規定的理髮價格6.5元和目前實際的理髮價格相差太大，所以不合實際。我們同意教科書上所舉的例題與習題應該盡量與日常生活配合。這個題目是屬於“小數除以整數”及“小數乘以整數”的應用問題。因此必須有小數的出現。我們輔導兒童學習數學，旨在培養小朋友的思考以及解決各種不同問題的能力。如果說當這個題目中的理髮價格改爲每次20元（或其他數目）則小朋友會做而當理髮價格爲每次6.5元則小朋友不會做或有困擾，則我們的數學教學就完全失敗了。事實上，不論理一次髮要多少錢，只要價格確定之後，小朋友都要會做這個題目，這才算是眞正學到如何處理這類的應用問題。

老師們常在教學研討會上提出這種類似的提問以批評教科書與日常生活不能配合。我們認爲這種批評並不是屬於建設性的。