從幾何觀點證明一道因式分解的恆等式

連威翔

中台興化學工業股份有限公司

壹、前言

某次，筆者指導就讀國中二年級的外甥寫一張數學練習卷上他覺得有困難的問題時，發現在其中一道題目上花費了較多的時間，該問題如下：

問題 1：因式分解 $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$.

在該次的指導過程中，筆者並未找出問題 1 的正確解答，是在事後才找出其解法。參考[1]的內容，我們知道因式分解的過程是要把一個項數在兩項以上的多項式改寫為一個連乘積，連乘積中的每個因子都是原本多項式的因式。讀者若對問題 1 有興趣，不妨拿出紙筆練習推導看看，可以暫時先不要往下閱讀。

在底下的第二節中，筆者將先介紹問題 1 的解答，接著則會做進一步的探討，將從幾何觀點出發來證明問題 1 所得到的分解恆等式。

貳、從問題 1 的解答談起

筆者發現，問題 1 求解的方法不只一種，請參考底下的解答：

解答：問題 1 的第一種解法如下：

$$\begin{aligned}ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)&=ab(a-b)+b^2c-bc^2+c^2a-ca^2\\&=ab(a-b)-c(a^2-b^2)+c^2(a-b)=(a-b)(ab-ca-bc+c^2)\\&=(a-b)[b(a-c)-c(a-c)]=(a-b)(b-c)(a-c).\end{aligned}$$

而第二種解法如下：

$$\begin{aligned}ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)&=ab(a-b)+bc(b-c)-ca(a-c)\\&=ab(a-b)+bc(b-c)-ca[(a-b)+(b-c)]\\&=(a-b)(ab-ca)+(b-c)(bc-ca)=a(a-b)(b-c)+c(b-c)(b-a)\\&=(a-b)(b-c)(a-c).\end{aligned}$$

第三種解法是透過多項式的因式定理，我們令

$$f(a,b,c)=ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a),$$

首先，固定 b 與 c，將 a 用 b 取代，得到

$$f(b,b,c)=b^2(b-b)+bc(b-c)+cb(c-b)=0,$$

因此， $a-b$ 是多項式的一次因式。其次，固定 c 與 a，將 b 用 c 取代，一樣可以得到 $f(a,c,c)=0$，因此，$b-c$ 是多項式 $f(a,b,c)$ 的因式。同理，$c-a$ 也是多項式 $f(a,b,c)$ 的因式。又 $f(a,b,c)$ 是一個三次齊次多項式，由此可知

$$f(a,b,c)=k(a-b)(b-c)(c-a),$$

其中 k 為某一常數，再比較係數可知 $k=-1$。因此，

$$f(a,b,c)=-(a-b)(b-c)(c-a)=(a-b)(b-c)(a-c).$$

至此，問題 1 解題完畢。

相信許多讀者在看完上述解答之前，就已先一步求得問題 1 的答案，得到相同的分解式。根據上述解法的討論結果，我們可寫下：

$$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)=(a-b)(b-c)(a-c), \tag{1}$$

我們可以問：「是否可使用幾何的觀點來證明(1)式成立呢？」答案是肯定的，底下筆者將介紹一個從幾何觀點出發的 Fubini 原理證明法。不過在介紹該證明之前，我們需要以下的性質：

性質 1：令 $f(a,b,c)=ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$。對任意實數 m，若

$$a'=a+m, \qquad b'=b+m, \qquad c'=c+m,$$

則 $f(a',b',c')=f(a,b,c)$。

證明：我們有

$$\begin{aligned} f(a',b',c') &= (a+m)(b+m)(a-b)+(b+m)(c+m)(b-c)+(c+m)(a+m)(c-a)\\ &= f(a,b,c)+m(a+b+m)(a-b)+m(b+c+m)(b-c)+m(c+a+m)(c-a)\\ &= f(a,b,c)+m[(a^2-b^2)+(b^2-c^2)+(c^2-a^2)]\\ &\quad +m^2[(a-b)+(b-c)+(c-a)]=f(a,b,c), \end{aligned}$$

至此性質 1 證明完畢。

有了性質 1 後，對於(1)式，筆者所想要分享的幾何證明如下：

證明：因為三次齊次多項式 $f(a,b,c)=ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$ 為一個輪換式，即 $f(a,b,c)=f(b,c,a)=f(c,a,b)$，故不失一般性，我們可以只考慮 $a\ge b\ge c$ 與 $c\ge b\ge a$ 兩種情況，底下分成兩部分進行討論：

(a) 當 $a\ge b\ge c$ 時，若(1)式中的 a,b,c 三數之中至少有一數小於或等於 0，則我們令

$$a'=a+m, \qquad b'=b+m, \qquad c'=c+m,$$

並取夠大的正數 m，使以上三式中 a',b',c' 三數均為正數。很顯然，我們有

$$(a'-b')(b'-c')(a'-c')=(a-b)(b-c)(a-c),$$

又由前述的性質 1 可知 $f(a',b',c')=f(a,b,c)$，因此接下來我們只需考慮在 $a\geq b\geq c>0$ 的條件下證明(1)式成立。

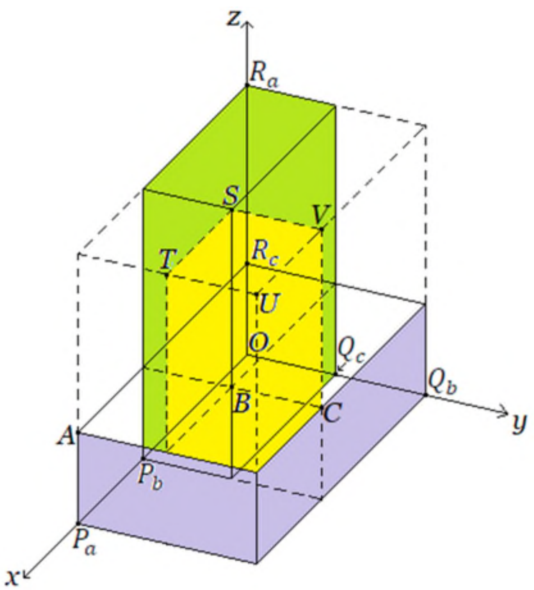
請注意，(1)式與下式等價：

$$ab(a-b)+bc(b-c)-ac(a-c)=(a-b)(b-c)(a-c), \tag{2}$$

為了表現出上式等號兩側共四個 3 次項在 $a\geq b\geq c>0$ 之條件下的幾何意義，我們在坐標空間中 x,y,z 軸的正向上分別取

$$P_a(a,0,0),\ \ P_b(b,0,0),\ \ Q_b(0,b,0),\ \ Q_c(0,c,0),\ \ R_c(0,0,c),\ \ R_a(0,0,a),$$

並以原點 O 為其中一個頂點，搭配 P_a,Q_b,R_c 為 O 的三個相鄰頂點作第一個長方體，再搭配 P_b,Q_c,R_a 為 O 的三個相鄰頂點作第二個長方體，如下圖。



圖一

我們知道，長方體共頂點的三稜長度為長方體的長、寬、高。在圖一中，共有兩個以 a,b,c 為長、寬、高的長方體，即透過緊鄰圖一上方的那段說明所作的兩長方體，兩者頂面的頂點分別包含 R_c 與 R_a，我們在前者的兩側面上塗色(半透明的顏色，下同)，並在後者的兩側面與頂面上塗上另一色，此處不妨將兩者依序稱為第一與第二長方體。注意圖一中落在第一與第二長方體以外但與兩者緊鄰的一個長方體，筆者也在其頂面與兩側面塗上第三種顏色，不妨稱此長方體為第三長方體，第三長方體的頂面為四邊形 $STUV$。

為了方便後續的說明，此處我們令圖一中分別過 R_a, R_c 且與 xy 平面平行的平面依序為 Γ_a, Γ_c，並將 xy 平面記為 Γ_0。在圖一中，注意頂面與底面分別落在 Γ_a, Γ_0 上，且以 P_a, V 為一組相距最遠頂點的長方體，將此長方體記為 M_1，其長、寬、高為 $a, b, a-b$，因此體積為 $ab(a-b)$。

在圖一中，我們令分別過 P_a, S, V 且平行 z 軸的直線與 Γ_c 平面依序交於 A, B, C 三點。此時，注意頂面與底面分別落在 Γ_c, Γ_0 上且以 Q_b, B 為一組相距最遠頂點的長方體，將此長方體記為 M_2，其長、寬、高為 $b, c, b-c$，因此體積為 $bc(b-c)$。最後，注意頂面與底面分別落在 Γ_a, Γ_c 且以 R_c, T 為一組相距最遠頂點的長方體，將此長方體記為 M_3，其長、寬、高為 $a, c, a-c$，因此體積為 $ac(a-c)$。此時，若我們直接以 M_1, M_2, M_3 這三個長方體的名稱表示其體積(底下亦將如此表示)，則(2)的左式滿足

$$ab(a-b)+bc(b-c)-ac(a-c)=M_1+M_2-M_3. \tag{3}$$

再回到圖一，我們將頂面與底面分別落在 Γ_a, Γ_c 且以 A, S 為一組相距最遠頂點的長方體記為 M_4，並將頂面與底面分別落在 Γ_a, Γ_c 且以 C, T 為一組相距最遠頂點的長方體記為 M_5。接著，將頂面與底面分別落在 Γ_c, Γ_0 且以 P_a, C 為一組相距最遠頂點的長方體記為 M_6，並將頂面與底面分別落在 Γ_a, Γ_c 且以 R_c, S 為一組相距最遠頂點的長方體記為 M_7。此時，仔細觀察圖一中各長方體之間的關係，可知有底下的兩道體積關係式：

$$M_1=M_4+M_5+M_6, \qquad M_3=M_4+M_7.$$

將以上兩式代入(3)式，可得

$$ab(a-b)+bc(b-c)-ac(a-c)=M_5+M_6+M_2-M_7. \tag{4}$$

注意上式中的 M_5 就是在圖一下方那段討論最後所提到的第三長方體，其頂面為落在 Γ_a 平面的四邊形 $STUV$，而其底面則落在 Γ_c 上，B, C 為底面四邊形的兩頂點。由於圖一中 M_5 的長、寬、高為 $a-b, b-c, a-c$，因此體積為 $(a-b)(b-c)(a-c)$，故我們可將(4)式改寫為

$$ab(a-b)+bc(b-c)-ac(a-c)=(a-b)(b-c)(a-c)+M_6+M_2-M_7. \tag{5}$$

比較上式與(2)式，可知若能證明 $M_6+M_2-M_7=0$，則(2)式成立。

回顧以上的討論內容，我們知道圖一中的長方體 M_2 之體積為 $bc(b-c)$，而依據上面對長方體 M_6 的介紹，觀察圖一可知其長、寬、高為 $b, c, a-b$，因此體積為 $bc(a-b)$。最後，依據上面對長方體 M_7 的介紹，觀察圖一可知其長、寬、高為 $b, c, a-c$，因此體積為

$bc(a-c)$，至此即可計算得

$$M_6 + M_2 - M_7 = bc(a-b) + bc(b-c) - bc(a-c) = 0.$$

將上式的結果代入(5)式，即可得到

$$ab(a-b) + bc(b-c) - ac(a-c) = (a-b)(b-c)(a-c),$$

因此(2)式成立，故(1)式成立，至此(a)項目討論完畢。

(b) 當 $c \geq b \geq a$ 時，我們考慮與(1)式等價的下式：

$$bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b) = (b-c)(c-a)(b-a), \tag{6}$$

如果我們能證明上式成立，也就證明了(1)式成立。令

$$g(b,c,a) = bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b),$$

若(6)式中的 a,b,c 三數之中至少有一數小於或等於 0，則我們令

$$b' = b + m, \qquad c' = c + m, \qquad a' = a + m,$$

並取夠大的正數 m，使以上三式中 a',b',c' 三數均為正數。顯然有

$$(b'-c')(c'-a')(b'-a') = (b-c)(c-a)(b-a),$$

又由前述的性質 1 可知 $g(b',c',a') = g(b,c,a)$，因此我們只需考慮在 $c \geq b \geq a > 0$ 的條件下證明(6)式成立。

考慮證明與(6)式等價的下式：

$$cb(c-b) + ba(b-a) - ca(c-a) = (c-b)(b-a)(c-a). \tag{7}$$

仿照(a)項目的討論過程，同理可畫出一個與圖一類似的圖，並透過幾何的討論方式證明(7)式成立，故可知(6)式成立，因此(1)式成立，至此(b)項目討論完畢。

最後，將以上(a),(b)兩部分的討論結果合起來看，即可確定在所有可能的情況下(1)式恆成立，證明完畢。

上述的證明，就是筆者透過幾何觀點對(1)式寫下的證明，雖然其過程較長，但希望能帶給讀者稍微不一樣的感受，期待讀者細細品味。

參、結語

本文寫作的初衷，是在得到問題 1 的解答後，想要另外透過圖像化的方式證明(1)式成立。有趣的是，當筆者將問題 1 透過分享給一位好友後，他以截然不同的方式給出了(1)式的另證，且過程非常簡潔。由此可見，面對數學問題的解題方式常因人而異，解題者常會從自己較習慣的角度切入問題。

值得一提的是，在第二節對(1)式提出之證明的寫作過程中，筆者原以為只要透過寫下與圖一相關的討論過程即可證明(1)式成立，但後來發現這樣會漏掉 a,b,c 三數之中至少有一數小於或等於 0 的情形。幸好後來發現可利用性質 1 進行補救，而這也讓主要從幾何觀點切入的證明過程增添了不少代數的味道。

無論如何，能夠完成證明總是很開心的。本文最後，筆者要先感謝審稿者提出許多有益的修正建言，使本文內容更加完善。除此之外，希望讀者能再次留意圖一的畫法，它是第二節中(1)式之幾何證明的出發點。日後讀者若想要證明像(1)式這類的恆等式時，不妨試著從幾何的觀點出發，來一趟有趣的數學探索之旅，但記得旅途中有可能會用上一些代數性質，才能使旅途更圓滿、收穫更豐富喔。

參考文獻

1. 因式分解，維基百科條目。
2. T. Andreescu and Z. Feng (2004), Calculating in Two Ways: Fubini’s Principle, A Path to Combinatorics for Undergraduates, Springer.
3. Yufei Zhao (2007), Counting in Two Ways, https://yufeizhao.com/olympiad/doublecounting_mop.pdf.
4. Krassimir Penev (2008), The Fubini Principle, The MAA Monthly, No.3, Vol.115.
5. Karen Ge (2016), Counting in Two Ways, October 17, 2016.